UNIVERSIDAD DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERIA

Complemento de Matemáticas Superiores

(PURAS Y APLICADAS)

TOMO II

Prof. CARLOS GRANDJOT R.

Redactores:
LUIS COURT M. — JORGE SILVA M.

APUNTES DE CLASES

EDITORIAL UNIVERSITARIA, S. A.
1957

UNIVERSIDAD DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERIA

COMPLEMENTO DE MATEMATICAS SUPERIORES

(PURAS Y APLICADAS)

Tomo II

Prof.
CARLOS GRANDJOT R.

Redactores
Luis Court M. - Jorge Silva M.

1957

EDITORIAL UNIVERSITARIA, S. A.
Ricardo Santa Cruz 747, Teléfono 36252, Casilla 10220, Santiago

ES PROPIEDAD.

INSCRIPCION N° 13375

Todo ejemplar debe llevar el sello de los autores, considerándose fuera de la ley al que no cumpla este requisito.

FUNCIONES EULERIANAS

GENERALIDADES:

Nos ocuparemos en este capítulo del esuudio de dos interesantes funciones, definidas por medio de integrales impropias, que reciben el nombre de Integrales de Euler o Funciones Eulerianas.

Función Beta:

La primera de estas funciones, llamada Integral Euleriana de primera especie o Función Beta, se define por la integral:

$$B(m, n) = \int_0^1 x^{m-1}(1 - x)^{n-1}\, dx \qquad (1)$$

que como se puede ver depende de dos cantidades arbitrarias e independientes: m y n, que reciben el nombre de Parámetros de la función.

Debemos establecer, para que valores de estos parámetros, la integral converge.

Está a la vista, que si $m \geq 1$ y $n \geq 1$, la función sub-integral es contínua y la integral resulta convergente.

Podemos demostrar que mientras se conserven $m > 0$ y $n > 0$, la integral seguirá convergente.

Descompongamos la ecuación (1) en la forma:

$$B(m, n) = \int_0^{1/2} x^{m-1}(1 - x)^{n-1}\, dx + \int_{1/2}^{1} x^{m-1}(1 - x)^{n-1}\, dx$$

Entonces, en la hipótesis que hemos hecho respecto a los valores de m y n, que constituye el caso más desfavorable, se puede escribir :

$$\int_0^{1/2} x^{m-1}(1 - x)^{n-1}\, dx < 2^{|n-1|} \int_0^{1/2} x^{m-1}\, dx$$

o sea:
$$\int_0^{1/2} x^{m-1}(1 - x)^{n-1}\, dx < \frac{2^{|n-1|}}{m \cdot 2^m} \qquad (2)$$

Igualmente:
$$\int_0^{1/2} x^{m-1}(1 - x)^{n-1}\, dx < 2^{|m-1|} \int_{1/2}^{1} (1 - x)^{n-1}\, dx$$

o sea:
$$\int_{1/2}^{1} x^{m-1}(1 - x)^{n-1}\, dx < \frac{2^{|m-1|}}{n \cdot 2^n} \qquad (3)$$

Las desigualdades (2) y (3), muestran que la integral B(m,n) converge aún en estas condiciones.

Estudiaremos algunas propiedades de esta función:

Demostraremos, primeramente, que la función es simétrica respecto a sus parámetros m y n. Para ello, cambiamos la variable x, por una nueva variable u, de modo que:

$$x = 1 - u \quad ; \quad dx = - du$$

Encontramos:

$$B(m,n) = - \int_1^0 (1 - u)^{m-1} u^{n-1} du$$

e invirtiendo los límites:

$$B(m,n) = \int_0^1 u^{n-1} (1 - u)^{m-1} du$$

Si comparamos, ahora, esta ecuación con (1) advertimos que ella puede obtenerse de esta última, permutando los valores de m y n entre sí.

Se verifica entonces que:

$$B(m,n) = B(n,m) \qquad (4)$$

es decir, la función Beta es conmutativa o simétrica respecto a sus dos parámetros. En seguida, expresaremos esta función, por medio de integrales trigonométricas, lo que será de gran utilidad, cuando relacionamos entre sí las dos funciones de Euler, como asimismo para algunas aplicaciones que veremos más adelante.

Partiendo de la definición:

$$B(m,n) = \int_0^1 x^{m-1} (1 - x)^{n-1} dx$$

y haciendo el cambio: $x = \text{sen } \theta$

de modo que: $dx = 2 \text{ sen } \theta \cos \theta \, d\theta$

se tiene:

$$B(m,n) = \int_0^{\pi/2} (\text{sen } \theta)^{2m-2} (1 - \text{sen}^2 \theta)^{n-1} \, 2 \text{ sen } \theta \cos \theta \, d\theta$$

y reduciendo, se llega a:

$$B(m,n) = 2 \int_0^{\pi/2} (\text{sen } \theta)^{2m-1} (\cos \theta)^{2n-1} \, d\theta \qquad (5)$$

Deduciremos, por último, una tercera expresión de la función Beta, que utilizaremos pronto.

Efectuando el cambio de variable;

$$x = \frac{1}{1+u}$$

en la ecuación (1), que define a nuestra función, obtendremos, teniendo en cuenta que:

$$dx = - \frac{du}{(1+u)^2}$$

y que;

$$1 - x = \frac{u}{1+u}$$

$$B(m,n) = - \int_\infty^0 \frac{1}{(1+u)^{m-1}} \frac{u^{n-1}}{(1+u)^{n-1}} \frac{du}{(1+u)^2}$$

y reduciendo

$$B(m,n) = \int_0^\infty \frac{u^{n-1} \, du}{(1+u)^{m+n}}$$

y expresando nuevamente en la variable x:

$$B(m,n) = \int_0^{\infty} \frac{x^{n-1}\ dx}{(1\ \ x)^{m\ n}}$$

Las propiedades que hemos establecido de nuestra función Beta, bastarán para los fines que nos proponemos, por lo cual pasaremos inmediatamente a estudiar la segunda de las funciones que habíamos anunciado.

Función Gama:

Se dá este nombre, como asimismo el de integral Euleriana de Segunda especie, a la función definida por la ecuación:

$$\Gamma(m) = \int_0^{\infty} x^{m-1}\ e^{-x}\ dx \qquad (1)$$

Esta función, depende de un solo parámetro m, y converge según veremos inmediatamente, para valores positivos de m:

Escribamos:

$$\Gamma(m) = \int_0^1 x^{m-1}\ e^{-x}\ dx + \int_1^{\infty} x^{m-1}\ e^{-x}\ dx$$

Consideremos ambas integrales separadamente:
En primer lugar:

$$\int_0^1 x^{m-1}\ e^{-x}\ dx < \int_0^1 x^{m-1}\ dx$$

es decir:

$$\int_0^1 x^{m-1}\ e^{-x}\ dx < \frac{1}{m} \qquad (2)$$

Del mismo modo, escribiendo:

$$\int_0^{\infty} x^{m-1}\ e^{-x}\,dx = \int_1^{\infty} x^{-2} \cdot x^{m+1}\, e^{-x}\,dx = \int_1^{\infty} x^{-2}\ \left(\frac{x^{m+1}}{e^x}\right) dx$$

y teniendo en cuenta que la función exponencial e^x crece más rápidamente que la potencia x^{m+1}, podemos poner:

$$\int_1^{\infty} x^{m-1}\ e^{-x}\,dx < K \int_1^{\infty} x^{-2}\ dx$$

en que K es un número finito.

Con esto:

$$\int_1^{\infty} x^{m-1}\ e^{-x}\,dx < K \cdot \left[\frac{1}{x}\right]_{\infty}^{1};$$

o sea;

$$\int_1^{\infty} x^{m-1}\ e^{-x}\,dx < K \qquad (3)$$

Las desigualdades (2) y (3), muestran que para $m > 0$, la función Gama converge.

Establezcamos ahora, algunas propiedades de esta función.

Cambiemos m por m+1 en la ecuación (1). Obtenemos así:

$$F(m+1) = \int_0^{\infty} x^{m}\ e^{-x}\ dx$$

Trataremos, entonces, de relacionar las funciones F(m) y F(m+1):

Escribamos para ello:

$$F(m+1) = -\int_0^{\infty} x^{m}\ d(e^{-x})$$

e integremos por partes;

$$F(m+1) = -\left[x^m e^{-x}\right]_0^{\infty} + m \int_0^{\infty} x^{m-1} e^{-x} dx$$

La primera parte de la integración es nula en ambos límites, y la nueva integral es la función; F(m), de modo que;

$$F(m+1) = m \cdot F(m) \qquad (4)$$

Esta es la propiedad fundamental de la función Gama, y muestra que si se conoce el valor de la función, para un cierto valor m del parámetro, se puede calcular su valor para el parámetro m+1, y sucesivamente para los valores; m+2, m+3, ... m+n, de él.

Del mismo modo, de la fórmula (4) obtenemos después de cambiar m por m - 1 ;

$$F(m) = (m-1) \cdot F(m-1)$$

que vale para $m > 1$.

De aquí tenemos que;

$$F(m-1) = \frac{F(m)}{(m-1)} \qquad (5)$$

Esta fórmula permite el cálculo de la función Gama para valores; m-1, m-2,... m-n, del parámetro, cuando ella es conocida para el valor m, de él.

Si damos a m el valor unitario, obtenemos;

$$F(1) = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = -\left[e^{-x}\right]_0^{\infty}$$

o sea; $F(1) = 1$

y dando valores a m en la fórmula (4), a partir de m = 1:

$$F(2) = 1 \cdot (1) = 1$$

$$F(3) = 2 \cdot (2) = 1.2$$

$$F(4) = 3 \cdot (3) = 1.2.3$$

.....

.....

$$F(m + 1) = m \cdot (m) = m.'$$

Deducimos entonces que los números factoriales pueden expresarse en términos de la función Gama, por medio de la fórmula:

$$\boxed{m! = F(m + 1)} \qquad (6)$$

Con ayuda de las relaciones establecidas hasta ahora, podemos calcular la función Gama para cualquier valor entero del parámetro m. Intentaremos ahora calcularla para valores fraccionarios de él.

VCalculemos: $F(\frac{1}{2})$, poniendo $m = \frac{1}{2}$ en la ecuación (1):

$$F(\frac{1}{2}) = \int_0^\infty x^{-1/2} \; e^{-x} \, dx$$

y cambiando la variable de modo que:

$$x = u^2$$

de donde se obtiene $dx = 2u \; du$

encontramos: $$F(\frac{1}{2}) = 2 \int_0^\infty e^{-u^2} \, du$$

y escribiendo nuevamente en la variable x:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^{\infty} e^{-x^2} \, dx$$

Escribamos la misma ecuación para la variable y:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^{\infty} e^{-y^2} \, dy$$

Si multiplicamos miembros a miembro estas ecuaciones:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 4\int_0^{\infty} e^{-x^2} \, dx \int_0^{\infty} e^{-y^2} \, dy$$

que puede ponerse en forma de integral doble:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 4\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{(x^2+y^2)} \, dx \, dy$$

Pasaremos a coordenar polares, haciendo:

$$x = r \cos\theta$$

$$y = r \operatorname{sen}\theta$$

y recordando que el elemento dx dy, debemos reemplazarse por r dr dθ, al efectuar este cambio:

$$\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right) = 4\int_0^{\infty}\int_0^{\pi/2} e^{-r^2} \, r \, dr \, d\theta$$

que escribimos:

$$\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^{\infty} e^{-r^2} \, d(r^2) \int_0^{\pi/2} d\theta$$

y que dá $$\Gamma^2(\tfrac{1}{2}) = \pi \int_0^\infty e^{-r^2}\, d(r^2)$$

Efectuando esta integral, y permutando sus límites:

$$\Gamma^2(\tfrac{1}{2}) = \pi \left[e^{-r^2} \right]_\infty^0$$

de donde: $$\Gamma^2(\tfrac{1}{2}) = \pi$$

de modo que: $$\boxed{\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}} \qquad (7)$$

puesto que consideramos solamente el valor positivo al estraer raíz cuadrada.

Escribamos la fórmula:

$$\Gamma(m+1) = m \cdot \Gamma(m)$$

y pongamos $m = \frac{1}{2}$:

Encontramos: $$\Gamma(\tfrac{3}{2}) = \tfrac{1}{2}\,\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

Poniendo sucesivamente: $m = \frac{3}{2}, \frac{5}{2}$, etc.

$$\Gamma(\tfrac{5}{2}) = \tfrac{3}{2} \quad \Gamma(\tfrac{3}{2}) = \tfrac{3}{2} \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\,\tfrac{7}{2} = \tfrac{5}{2}\,\Gamma(\tfrac{5}{2}) = \tfrac{5}{2} \cdot \tfrac{3}{2} \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

....1.

Esta tabla muestra, que pueden calcularse, a partir de $\Gamma(\frac{1}{2})$, los valores que toma la función, para valores cualesquiera múltiplos de 1/2, de su parámetro m.

A causa de la relación existente entre la función Gama y los factoriales, podemos, desde este momento, crear los factoriales de números fraccionarios, y teniendo en cuenta que la ecuación:

$$m! = \Gamma(m + 1)$$

determina esta relación, podemos escribir una tabla de factoriales de números múltiplos de $\frac{1}{2}$:

$$(-\tfrac{1}{2})! = \Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

$$(\tfrac{1}{2})! = \Gamma(\tfrac{3}{2}) = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

$$(\tfrac{3}{2})! = \Gamma(\tfrac{5}{2}) = \tfrac{3}{2} \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

$$(\tfrac{5}{2})! = \Gamma(\tfrac{7}{2}) = \tfrac{5}{2} \cdot \tfrac{3}{2} \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

Más adelante daremos algunas indicaciones para el cálculo de la Función Gama, para valores reales arbitrarios de su parámetro, operación que podremos efectuar con la aproximación que deseamos.

Expresaremos ahora la función Gama en otra forma, que ocuparemos en el párrafo que trataremos a continuación:

Según su definición:

$$\Gamma(m) = \int_0^\infty x^{m-1} e^{-x} dx$$

Si cambiamos de variable, de modo que:

$$x = u^2$$

o sea: $dx = 2u\ du$

tendremos $$\Gamma(m) = 2\int_0^\infty u^{2m-1} e^{-u^2} du$$

y escribiendo la integral sobre x :

$$\boxed{\Gamma(m) = 2\int_0^\infty x^{2m-1} e^{-x^2} dx} \qquad (8)$$

Relacionaremos esta función con la función Beta:

Relaciones de las Funciones Beta y Gama: Partiendo de:

$$\Gamma(m) = 2\int_0^\infty x^{2m-1} e^{-x^2} dx$$

y escribiendo además

$$\Gamma(n) = 2\int_0^\infty y^{2n-1} e^{-y^2} dy$$

tendremos, al multiplicar miembro a miembro las dos ecuaciones:

$$\Gamma(m) \cdot \Gamma(n) = 4\int_0^\infty x^{2m-1} e^{-x^2} dx \int_0^\infty y^{2n-1} e^{-y^2} dy$$

y escribiendo en forma de integral doble:

$$\Gamma(m) \cdot \Gamma(n) = 4\int_0^\infty \int_0^\infty x^{2m-1} y^{2n-1} e^{-(x^2+y^2)} dx\, dy$$

Pasando a coordenadas polares:

Haciendo: $x = r \cos \theta$

$y = r \operatorname{sen} \theta$

y reemplazando dx dy por r dr d θ:

$$\Gamma(m)\ \Gamma(n) = 4\int_0^{\infty}\int_0^{\pi/2} r^{2m+2n-1}\ e^{-r^2}\ (\cos\theta)^{2m-1}\ (\operatorname{sen}\theta)^{2n-1}\ d\theta dr$$

Escribiremos ahora:

$$\Gamma(m)\ \Gamma(n) = 4\int_0^{\infty} r^{2m+2n-1}\ e^{-r^2}\ dr \int_0^{\pi/2} (\cos\theta)^{2m-1}\ (\operatorname{sen}\theta)^{2n-1}\ d\theta$$

pero como:

$$2\int_0^{\pi/2} (\cos\theta)^{2m-1}\ (\operatorname{sen}\theta)^{2n-1}\ d\theta = B(m,n) \qquad (1)$$

resulta:

$$\Gamma(m)\ \Gamma(n) = 2\ B(m,n) \int_0^{\infty} r^{2(m+n)-1}\ e^{-r^2}\ dr$$

es decir: $\Gamma(m)\ \Gamma(n) = B(m,n) \cdot \Gamma(m+n)$

de donde despejamos:

$$\boxed{B(m,n) = \frac{\Gamma(m)\ \Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}} \qquad (2)$$

Esta es la fórmula que buscamos, que es de mucha utilidad, para transformar las funciones Beta en Gama, lo que siempre se procura, por la facilidad de operación que presenta esta última.

Como aplicación de nuestra nueva fórmula, hagamos en ella:

$$m = n = \frac{1}{2}$$

Entonces: $$B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1)} = \Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right)$$

y de la ecuación (1) se saca:

$$B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^{\pi/2} d\theta = \pi$$

e igualando, se obtiene:

$$\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right) = \pi$$

de donde: $$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

que sirve de comprobación a los resultados obtenidos anteriormente.

Cálculo de la Función Gama:

Existen tablas completas que dan, con bastante aproximación, los valores de $\Gamma(m)$; es aún más común tabular los valores de Log $\Gamma(m)$, por razones de utilidad práctica, fáciles de comprender dada la forma de estas funciones.

Hemos visto, hasta ahora, que se pueden calcular los valores de $\Gamma(m)$ y de $\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)$ para toda clase de valores enteros positivos de m.

Deduciremos una formula útil para el cálculo de nuestra función para valores fraccionarios del paráme - tro.

En el estudio de la función Beta, mostramos que;

$$B(m,n) = \int_0^{\infty} \frac{x^{n-1}\ dx}{(1+x)^{m+n}}$$

y como la función Beta está relacionada con la función Gama por la ecuación;

$$B(m,n) = \frac{\Gamma(m)\ \Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

deducimos que;

$$\frac{\Gamma(m)\ \Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} = \int_0^{\infty} \frac{x^{n-1}\ dx}{(1+x)^{m+n}}$$

y haciendo $m+n=1$ obtenemos;

$$\Gamma(1-n)\ \Gamma(n) = \int_0^{\infty} \frac{x^{n-1}\ dx}{(1+x)}$$

Esta integral puede avaluarse por medio de desarrollo en series.

Escribamos con este objeto;

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{n-1}\ dx}{1+x} = \int_0^{1} \frac{x^{n-1}\ dx}{1+x} + \int_1^{\infty} \frac{x^{n-1}\ dx}{1+x}$$

Calculemos estas integrales separadamente:

Escribamos primeramente:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots \pm \ldots$$

que vale para $0 < x < 1$ de modo que:

$$\int_0^1 \frac{x^{n-1}\,dx}{1+x} = x^{n-1}\,(1 - x + x^2 - x^3 + \ldots \pm \ldots)\,dx$$

e integrando:

$$\int_0^1 \frac{x^{n-1}\,dx}{1+x} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} - \ldots \pm \ldots \quad (a)$$

En seguida para desarrollar $\frac{1}{1+x}$ en el intervalo $1 < x \infty$, pongamos:

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{x(1+\frac{1}{x})} = \frac{1}{x}\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} + \ldots \pm \ldots\right)$$

de modo que:

$$\int_1^\infty \frac{x^{n-1}\,dx}{1+x} = \int_1^\infty x^{n-1}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} - \ldots \pm \ldots\right)dx$$

Integrando y recordando que $n < 1$:

$$\int_1^{\infty} \frac{x^{n-1}\,dx}{1+x} = -\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-3} + \cdots \pm \cdots \qquad (b)$$

Sumando ahora las ecuaciones (a) y (b), tendremos:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{n-1}\,dx}{1+x} = \cdots + \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} +$$

$$\frac{1}{n+2} - \cdots = \frac{\pi}{\operatorname{Sen} \pi n}$$

según se encontró en el Capítulo "Series de Fourier".

Entonces:

$$\Gamma(n)\,\Gamma(1-n) = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi n} \qquad (1)$$

fórmula que es válida para $0 < n < 1$.

Esta fórmula es de gran utilidad, para calcular nuestra función, para valores comprendidos en el intervalo (0, 1).

Apliquémosla, por ejemplo, para:

$$n = \frac{1}{6},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{2},$$

Obtenemos:

Para $n = \frac{1}{6}$: $\Gamma(\frac{1}{6})\ \Gamma(\frac{5}{6}) = 2\pi$

O sea: $$\Gamma(\frac{5}{6}) = \frac{2\pi}{\Gamma(\frac{1}{6})} \qquad (2)$$

Para $n = \frac{1}{4}$ $\Gamma(\frac{1}{4})\ \Gamma(\frac{3}{4}) = \pi\sqrt{2}$

o sea: $$\Gamma(\frac{3}{4}) = \frac{\pi\sqrt{2}}{\Gamma(\frac{1}{4})} \qquad (3)$$

Para $n = \frac{1}{3}$: $\Gamma(\frac{1}{3})\ \Gamma(\frac{2}{3}) = 2\pi \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}$

o sea : $$\Gamma(\frac{2}{3}) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}\,\Gamma(\frac{1}{3})} \qquad (4)$$

Por último, para $n = \frac{1}{2}$;

$$\Gamma^2(\tfrac{1}{2}) = \pi$$

de donde: $$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

resultado que ya conocemos;

Las fórmulas (2), (3) y (4) consideradas como ejemplos, muestran que conociendo la función para valores comprendidos entre 0 y $\frac{1}{2}$, podemos calcularla para el intervalo (0, 1), por aplicación directa de la fórmula (1).

Con estas deducciones, hemos extendido el cálculo de la función Gama a todo el intervalo real, ya que siempre podemos expresar la función que busquemos, en términos de otra cuyo parámetro pertenezca al intervalo (0,1) y a su vez expresar ésta, en función de otra de parámetro comprendido en el intervalo $(0, \frac{1}{2})$.

Por ejemplo, si queremos calcular: $\Gamma(\frac{11}{4})$, nos basta recurrir a la fórmula:

$$\Gamma(m) = (m-1) \cdot \Gamma(m-1)$$

Haciendo en ella $m = \frac{11}{4}$;

$$\Gamma\,\frac{11}{4} = \frac{7}{4}\ , \Gamma(\frac{7}{4})$$

y aplicando nuevamente la fórmula para $m = \frac{7}{4}$:

$$\Gamma(\tfrac{7}{4}) = \tfrac{3}{4} \cdot \Gamma(\tfrac{3}{4})$$

de modo que: $$\Gamma(\tfrac{11}{4}) = \tfrac{7}{4} \cdot \tfrac{3}{4} \cdot \Gamma(\tfrac{3}{4})$$

donde si se quiere, se puede expresar este resultado en función de $\Gamma(\frac{1}{4})$ por medio de la fórmula (3).

Daremos en seguida una idea de como debe procederse para la avaluación de las integrales de Euler, para valores arbitrarios de sus parámetros.

Supongamos que deseamos calcular;

$$\Gamma(\tfrac{5}{4}) = \int_0^\infty x^{1/4} \; e^{-x} \; dx$$

con aproximación de 3 cifras.

Recordemos para este objeto, que el cálculo numérico de una integral definida puede efectuarse por medio del método de Simpson, siempre que el intervalo de integración sea finito.

Escribamos entonces;

$$\Gamma(\tfrac{5}{4}) = \int_0^a x^{1/4} \; e^{-x} \; dx + \int_0^\infty x^{1/4} \; e^{-x} \; dx$$

y tratemos de determinar el parámetro a, de modo que la última integral, no influya en la aproximación que buscamos.

Sea, por ejemplo:

$$\int_0^\infty x^{1/4} \; e^{-x} \; dx < 0{,}0004$$

Escribamos;

$$\int_a^\infty x^{1/4} \; e^{-x} \; dx = \left[- x^{1/4} \; e^{-x} \right]_0^\infty + \frac{1}{4} \int_0^\infty x^{3/4} \; e^{-x} \; dx$$

Haremos crecer esta última integral, poniendo $a^{-3/4}$ en lugar de $x^{-3/4}$ ya que $x = a$, es el valor mínimo que la variable x puede tomar. Según esto;

$$\int_a^{\infty} x^{1/4} e^{-x} dx < a^{1/4} e^{-a} + \frac{1}{4} a^{-3/4} \int_0^{\infty} e^{-x} dx$$

o sea; $$\int_0^{\infty} x^{1/4} e^{-x} dx < a^{1/4} e^{-a} \left(1 + \frac{1}{4a}\right)$$

y haciendo $a = 9$, obtenemos;

$$\int_0^{\infty} x^{1/4} e^{-x} dx < 0,00025$$

que muestra que el problema de calcular $\Gamma(\frac{5}{4})$ se reduce a aplicar la fórmula de Simpson para el cálculo de la integral;

$$\int_0^{9} x^{1/4} e^{-x} dx$$

Aplicaciones de las Funciones Eulerianas:

El campo de aplicación de estas funciones es vastísimo, ya que en numerosas ramas de las Matemáticas, se llega frecuentemente al cálculo de integrales definidas complicadas.

A menudo, resulta posible expresar estos resultados en función de las integrales de Euler, que como hemos visto se calculan en forma casi mecánica.

Por medio de cambios de variable sucesivos, pueden encontrarse miles de formas integrales diferentes de estas funciones. El lector podrá hacer un resumen de los re-

-sultados que obtenga procediendo de esta manera, y po - drá así reconocer, en cualquier momento las integrales de Euler, en los problemas por resolver.

Una aplicación directa de importancia, la constituyen las integrales trigonométricas de la forma:

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^p\theta \quad \cos^q\theta \, d\theta$$

Partimos de:

$$B(m,n) = 2\int_0^{\pi/2} (\cos\theta)^{2n-1} \, (\operatorname{sen}\theta)^{2m-1} \, d\theta$$

Observando la semejanza entre ambas, hagamos:

$$m = \frac{p+1}{2}$$

$$n = \frac{q+1}{2}$$

y tendremos:

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^p\theta \, \cos^q\theta \, d\theta = \frac{1}{2} B\left(\frac{p+1}{2}, \frac{q+1}{2}\right)$$

y teniendo en cuenta que:

$$B(m,n) = \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

se encuentra finalmente:

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^p\theta \quad \cos^q\theta \, d\theta = \frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right)}{2\,\Gamma\left(\frac{p+q}{2}\right)+1)} \qquad (1)$$

Aplicaciones:

Calcular: $I = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3\theta \cos^4\theta \, d\theta$

Aplicando directamente la fórmula:

$$I = \frac{\Gamma(2)\,\Gamma(\frac{5}{2})}{2\,\Gamma(\frac{9}{2})}$$

y transformando:

$$I = \frac{1 \cdot \Gamma(1)\,\Gamma(\frac{5}{2})}{2 \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \Gamma(\frac{5}{2})}$$

de donde: $$I = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3\theta \cos^4\theta \, d\theta = \frac{2}{35}$$

Calculemos en seguida:

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^6 x \, dx$$

Poniendo $p = 6$ y $q = 0$,

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^6 x \, dx = \frac{\Gamma(\frac{7}{2})\,\Gamma(\frac{1}{2})}{2\,\Gamma(\frac{6}{2})}$$

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^6 x \, dx = \frac{\frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}\,\Gamma(\frac{1}{2})}{2 \cdot 2 \cdot 1\,\Gamma(1)} = \frac{15\,\pi}{32}$$

Por los métodos corrientes, de integración, esta integral, que aquí calculamos sólo en líneas, requiere un laborioso desarrollo.

Resolveremos, en seguida, un problema de Mecánica Racional, en que aplicaremos a la función Gama.

Consideremos una partícula de masa m, que es atraída por un centro de fuerzas, con una intensidad que varía inversamente proporcional a la distancia.

El 2° Principio de Newton, dá:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = - \frac{k}{x}$$

y poniendo:

$$\frac{k}{m} = a^2$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = - \frac{a^2}{x}$$

Para integrar esta ecuación diferencial, multiplicamos ambos miembros por $2 \frac{dx}{dt}$ y tenemos:

$$2 \frac{dx}{dt} \frac{d^2x}{dt^2} = - 2 a^2 . \frac{1}{x} \frac{dx}{dt}$$

que escribimos:

$$d\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = - 2 a^2 \frac{dx}{x}$$

e integrando:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 2 a^2 \text{ Log } x + C$$

Determinaremos la constante de modo que la velocidad sea nula, cuando $x = x_o$. Entonces:

$$0 = - 2 a^2 \text{ Log } x_o + C$$

o sea:

$$C = 2 a^2 \text{ Log } x_o$$

de modo que:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 2\,a^2 \quad \text{Log} \quad \frac{x_o}{x}$$

$$\frac{dx}{dt} = -\,a\,\sqrt{2\,\text{Log}\quad \frac{x_o}{x}}$$

(Atribuimos signo negativo a la ecuación, a causa de que x decrece con el tiempo).

Luego:

$$t = -\quad \frac{1}{a\ \sqrt{2}} \quad \int_{x_o}^{x} \frac{dx}{\sqrt{\text{Log}\ \frac{x_o}{x}}}$$

Nos interesa calcular el tiempo que demora el móvil en llegar al origen caracterizado por x = 0:

Llamando T este tiempo, y haciendo el cambio de variable:

$$x = x_o \quad e^{-y}$$

o sea:

$$dx = -\,x_o \quad e^{-y} \quad dy$$

tenemos:

$$T = \frac{x_o}{a\sqrt{2}} \int_o^{\infty} y^{-1/2} \quad e^{-y}\ dy$$

y como esta integral es justamente $\Gamma(\frac{1}{2})$, deducimos que:

$$T = \frac{x_o\ \sqrt{\pi}}{a\ \sqrt{2}}$$

y reemplazando el valor de a :

$$T = x_o \quad \frac{\pi\, m}{2\, k}$$

Aplicaremos, por último, la función Gama al cálculo de la suma de la serie:

$$Z(p) = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

conocida en matemáticas con el nombre de "Función de Riemann".

Partamos de la ecuación:

$$\Gamma(p) = \int_o^{\infty} u^{p-1}\, e^{-u}\, du$$

y hagamos en ella el cambio de variable:

$$u = nx;\ du = n\ dx$$

Obtenemos:

$$\Gamma(p) = n^p \int_o^{\infty} x^{p-1}\ e^{-nx}\ dx$$

de donde:

$$\frac{1}{n^p} = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_o^{\infty} x^{p-1}\ e^{-nx}\ dx$$

Ahora, sumando sobre la variable n, entre 1 e ∞ :

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \frac{1}{\Gamma(p)} \sum_{1}^{\infty} \int_o^{\infty} x^{p-1}\ e^{-nx}\ dx$$

que se puede escribir;

$$\zeta(p) = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^{\infty} x^{p-1} \sum_{1}^{\infty} e^{-nx}\, dx \quad (1)$$

Pero $\sum_{1}^{\infty} e^{-nx}$ es una serie geométrica de razón e^{-x} cuya suma vale por consiguiente;

$$\sum_{1}^{\infty} e^{-nx} = \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} = \frac{1}{e^x - 1}$$

Reemplazando en (1):

$$\zeta(p) = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^{\infty} \frac{x^{p-1}}{e^x - 1}\, dx$$

que es la forma integral de la función de Riemann.

INTEGRALES DEFINIDAS

Trataremos en este Capítulo algunas generalidades sobre el cálculo de Integrales Definidas, ya que su estudio completo, sería por sí solo, tema de un voluminoso tratado.

Entendemos, en todo esto, por Integrales Definidas, aquel grupo de éstas para las cuales se hace difícil o imposible la obtención de la Integral Indefinida y que solamente pueden avaluarse, directamente, entre determinados límites por aplicación de los procedimientos, que nos proponemos ilustrar.

No nos ocuparemos, por tanto, de la obtención de las integrales indefinidas, sino que explicaremos brevemente la manera de obtener los valores de las integrales definidas en forma directa y haremos un grupo de aplicaciones como ilustración de los procedimientos que analizaremos.

El recurso fundamental, de la integración definida, es el cambio de variable de integración. Haremos un grupo de ejemplos que muestren la utilidad y elegancia de este artificio.

Nos ocuparemos luego del cálculo por Diferenciación bajo el signo integral y más adelante de la avaluación por formación de integrales dobles y por desarrollo en series : de las funciones sub-integrales.

En este párrafo aplicaremos a la integración definida, el teorema de Cauchy de las funciones variables compleja, cuyo estudio se ha hecho y en uno de los capítulos precedentes.

A.- Cambio de variable de integración:

Recordaremos en esta ocasión, que toda integral definida no es función de la variable de integración, sino de sus límites. Por esta causa se da a menudo el nombre de "variable aparente" a la variable de integración.

Son por tanto iguales las integrales;

$$\int_a^b F(x)\,dx \quad y \quad \int_a^b F(u)\,du$$

ya que tanto las funciones sub-integrales como los límites son los mismos, a pesar de ser diferentes las variables de integración.

Aplicaciones:

a) Calcular la integral;

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 x\,dx$$

Haciendo el cambio:

$$x = \frac{\pi}{2} - u \quad ; \quad dx = -du$$

se tiene: $$I = -\int_{\pi/2}^{0} \cos^2 u \, du = \int_{0}^{\pi/2} \cos^2 u \, du$$

Luego también:

$$I = \int_{0}^{\pi/2} \cos^2 x \, dx$$

Ahora bien: $$\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$$

de modo que si multiplicamos ambos miembros de esta ecuación por dx e integramos entre 0 y $\pi/2$:

$$\int_{0}^{\pi/2} \cos^2 x \, dx + \int_{0}^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 x \, dx = \int_{0}^{\pi/2} dx$$

Luego: $$2I = \frac{\pi}{2}$$

o sea: $$I = \frac{\pi}{4}$$

con lo cual:

$$\boxed{\int_{0}^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 x \, dx = \int_{0}^{\pi/2} \cos^2 x \, dx = \frac{\pi}{4}}$$

b) Calcular:

$$I = \int_{0}^{\pi} \frac{s \, dx}{1 + \operatorname{sen}^2 x}$$

Debemos tratar de eliminar la función algebraica del numerador para lo cual haremos:

$$x = \pi - y \quad ; \quad dx = -dy$$

$$I = -\int_{\pi}^{0} \frac{(\pi - y) \, dy}{1 + \operatorname{sen}^2 y}$$

e invirtiendo los límites y separando en dos integrales:

$$I = \pi \int_0^{\pi} \frac{dy}{1 + \operatorname{sen}^2 y} - \int_0^{\pi} \frac{y\, dy}{1 + \operatorname{sen}^2 y}$$

y como esta última integral es justamente I:

$$I = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{dy}{1 + \operatorname{sen}^2 y}$$

Para calcular esta integral, pongamos:

$$I = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{dy}{1 + \operatorname{sen}^2 y} + \frac{\pi}{2} \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{dy}{1 + \operatorname{sen}^2 y} \quad (1)$$

Consideremos esta última integral y hagamos en ella el cambio:

$$y = \pi - u \qquad ; \qquad dy = -du$$

Entonces:

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{dy}{1 + \operatorname{sen}^2 y} = -\int_{\pi/2}^{0} \frac{du}{1 + \operatorname{sen}^2 u} = \int_0^{\pi/2} \frac{du}{1 + \operatorname{sen}^2 u}$$

de modo que la ecuación (1) se reduce a:

$$I = \pi \int_0^{\pi/2} \frac{dy}{1 + \operatorname{sen}^2 y}$$

Escribiremos:

$$I = \pi \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\cos^2 x + 2\,\mathrm{sen}^2 x} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \int_0^{\pi/2} \frac{d(\sqrt{2}\ \mathrm{tg}\ x)}{1 + (\sqrt{2}\ \mathrm{tg}\ x)^2}$$

$$I = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \left[\mathrm{arc\ tg}(\sqrt{2}\ \mathrm{tg}\ x) \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\pi}{2}$$

Luego:

$$\int_0^{\pi} \frac{x\,dx}{1 + \mathrm{sen}^2 x} = \frac{\pi^2}{2\sqrt{2}}$$

c) Intercalaremos un ejemplo que sirve de advertencia en contra de transformaciones ilícitas.

Sea la integral:

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{1 + x^2}$$

Efectuando esta integral por los métodos conocidos, obtenemos:

$$I = \left[(\mathrm{arc\ tg}\ x \right]_{-1}^{1} = \frac{\pi}{4} - \left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{3} \qquad (1)$$

Ahora, si en nuestra integral hacemos la transformación:

$$x = \frac{1}{y} \quad ; \quad dx = -\frac{dy}{y^2}$$

tendremos, teniendo en cuenta que: Para $x = -1$, resulta $y = -1$ y para $x = 1$; $y = 1$:

$$I = -\int_{-1}^{1} \frac{dy}{y^2\left(1+\frac{1}{y^2}\right)} = \int_{-1}^{1} \frac{dy}{1+y^2} = -I$$

luego: $$2I = 0$$

que dá $$I = 0 \qquad (2)$$

Pero de las ecuaciones (1) y (2), sale:

$$\frac{\pi}{2} = 0$$

lo que constituye un absurdo.

Podemos preguntarnos: ¿Dónde está el error? Proviene éste, de que la transformacion

$$x = \frac{1}{y}$$

no transforma, en realidad, el intervalo $-1 \leq x \leq 1$ en $-1 \leq y \leq 1$ sino en las dos semi-rectas;

$$y \geq 1 \; ; \quad y \leq -1$$

El verdadero valor de la integral, es por consiguiente: $\frac{\pi}{2}$.

d) Calcular:

$$I = \int_0^{\pi/2} \text{Log sen } x \, dx \qquad (1)$$

Observemos que ésta es una integral impropia puesto que: Cuando $x \longrightarrow 0$, $\text{sen } x \longrightarrow 0$ con lo cual:

$$\text{Log sen } x \longrightarrow -\infty$$

Por otra parte:

$$0 \leqslant \operatorname{sen} x \leqslant 1$$

por lo cual debe ser:

$$\operatorname{Log} \operatorname{sen} x \leqslant 0$$

Esto hace proveer que la integral (1) será negativa.

Comencemos por hacer el cambio de variable:

$$x = \frac{\pi}{2} - u; \quad dx = - du$$

Entonces:

$$I = - \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \operatorname{Log} \cos u \, du = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{Log} \cos u \, du = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{Log} \cos x \, dx \quad (2)$$

Con esto:

$$2 I = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{Log} \operatorname{sen} x + \operatorname{Log} \cos x) \, dx$$

$$2 I = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{Log} \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} \, dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{Log} \operatorname{sen} 2x \, dx - \frac{\pi}{2} \operatorname{Log} 2 \quad (3)$$

En esta última integral, hagamos: $y = 2x$; $dy = 2 dx$.

Entonces:

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{Log} \operatorname{sen} 2x \, dx = \frac{1}{2} \int_{0}^{\pi} \operatorname{Log} \operatorname{sen} y \, dy$$

que escribimos:

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{Log} \operatorname{sen} 2x \, dx = \frac{1}{2} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{Log} \operatorname{sen} y \, dy + \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \operatorname{Log} \operatorname{sen} y \, dy \quad (4)$$

Consideremos la última de las integrales en (4), y hagamos en ella:

$$y = \pi - x \; ; \quad dy = - dx$$

Entonces:

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \text{Log sen } y \, dy = - \int_{\pi_2}^{0} \text{Log sen } x \, dx = \int_{0}^{\pi_2} \text{Log sen } x \, dx$$

La ecuación (4) dá entonces:

$$\int_{0}^{\pi_2} \text{Log sen } 2x \, dx = \int_{0}^{\pi_2} \text{Log sen } x \, dx = I$$

con lo cual se saca de (3):

$$2 I = I - \frac{\pi}{2} \text{Log } 2$$

y despejando I:

$$I = \frac{\pi}{2} \text{ Log } \frac{1}{2}$$

o sea:

$$\boxed{\int_{0}^{\pi_2} \text{Log sen } x \, dx = \int_{0}^{\pi_2} \text{Log cos } x \, dx = \frac{\pi}{2} \text{Log } \frac{1}{2}}$$

con lo cual, el problema queda resuelto.

Podríamos del mismo modo restar las ecuaciones (1) y (2), obteniendo:

$$\int_{0}^{\pi_2} \text{Log sen } x \, dx - \int_{0}^{\pi_2} \text{Log cos } x \, dx = 0$$

que se puede escribir:

$$\int_0^{\pi/2} \text{Log} \ \text{tg} \ x \, dx = 0$$

B) Diferenciación bajo el signo integral.

Sea $I(\alpha)$ una integral, definida por medio de la ecuación:

$$I(\alpha) = \int_a^b f(x, \alpha) \, dx$$

en que α es un parámetro independiente de la variable x y de los límites a y b.

I, es por tanto una función del parámetro α, y de los límites de la integral.

Demos, entonces, un incremento $\Delta\alpha$ al parámetro α, de modo que la función $I(\alpha)$ se transforma en:

$$I(\alpha + \Delta\alpha) \int_a^b f(x, \alpha + \Delta\alpha) \, dx$$

Restando de ésta, la ecuación primitiva, y dividiendo ambos miembros de la ecuación resultante por $\Delta\alpha$:

$$\frac{I(\alpha + \Delta\alpha) - I(\alpha)}{\Delta\alpha} = \int_a^b \frac{f(x, \alpha + \Delta\alpha) - f(x, \alpha)}{\Delta\alpha} \, dx$$

que escribimos:

$$\frac{\Delta I}{\Delta\alpha} = \int_a^b \frac{f(x, \alpha + \Delta\alpha) - f(x, \alpha)}{\Delta\alpha} \, dx$$

Antes de pasar al límite, deberemos aceptar que: El límite de una integral definida, es igual a la integral de límite de su función sub-integral.

Según ésto:

$$\frac{\partial I}{\partial \alpha} = \int_a^b \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} \, dx$$

o sea, podemos afirmar que una integral definida puede diferenciarse con respecto a cualquier parámetro contenido en su función sub-integral, como si el signo integral no existiese, en la hipótesis que dicho parámetro es independiente de la variable de integración y de los límites.

Este principio, es de fundamental importancia en Matemáticas, y constituye la base del procedimiento que aplicaremos al cálculo de integrales definidas.

Este procedimiento consiste en tratar de formar ecuaciones diferenciales que relacionen la función $I(\alpha)$ con el parámetro α, o con los parámetros, en general, si dicha función lo es de varios de ellos.

El problema se reduce, de esta manera, a la integración de una o más ecuaciones diferenciales.

Aplicaciones:

a) Calcular la integral:

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x} \, dx$$

Para ello, trataremos de avaluar un tipo más general de integral y deduciremos de ésta última la integral que buscamos.

Este artificio, tiene por objeto, introducir un parámetro con respecto al cual podamos diferenciar las ecuaciones con que contemos.

Partamos de la integral:

$$I = \int_0^{\infty} \frac{e^{-mx} \operatorname{sen} \alpha x}{x} dx \qquad (m > 0)$$

que derivaremos con respecto al parámetro α, obteniendo:

$$\frac{\partial I}{\partial \alpha} = \int_0^{\infty} e^{-mx} \cos \alpha x \, dx \qquad (1)$$

Observamos que esta integral puede calcularse aún indefinidamente.

Por medio de dos integraciones por partes, podríamos obtener:

$$\int e^{-mx} \cos \alpha x \, dx = \frac{e^{-mx}(\alpha \operatorname{sen} \alpha x - m \cos \alpha x)}{\alpha^2 + m^2}$$

Ahora, entre los límites 0 e ∞, sería:

$$\int_0^{\infty} e^{-mx} \cos \alpha x \, dx = \frac{m}{\alpha^2 + m^2}$$

con lo cual la ecuación (1) se reduce a:

$$\frac{\partial I}{\partial \alpha} = \frac{m}{\alpha^2 + m^2}$$

y siendo m, constante con relación a α:

$$dI = \frac{d\left(\frac{\alpha}{m}\right)}{1+\left(\frac{\alpha}{m}\right)^2}$$

Integrando esta ecuación diferencial:

$$I = \text{arc tg } \frac{\alpha}{m} + C$$

Para determinar la constante de integración, haremos $\alpha = 0$ y observando que la integral I, se hace nula para este valor de α, podremos deducir que $C = 0$.

Entonces:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-mx} \operatorname{sen} \alpha x}{x} \, dx = \text{arc tg } \frac{\alpha}{m}$$

Ahora, si hacemos que $m \longrightarrow 0$, tendremos:

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} \alpha x}{x} \, dx = \frac{\pi}{2}$$

Por último, haciendo $\alpha = 1$:

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x} \, dx = \frac{\pi}{2}$$

---

b) Intentemos, ahora calcular la integral:

$$I = \int_0^\infty e^{-x^2} \cos \alpha x \, dx$$

Derivemos, entonces, la ecuación anterior con respecto a α:

Obtenemos:

$$\frac{\partial I}{\partial \alpha} = - \int_0^\infty e^{-x^2} x \operatorname{sen} \alpha x \, dx$$

que podemos escribir en la forma:

$$\frac{\partial I}{\partial \alpha} = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \text{sen}\, \alpha\, x\, d(e^{-x^2})$$

Integrando por partes, obtenemos:

$$\frac{\partial I}{\partial \alpha} = \frac{1}{2} \left[\text{sen}\alpha\, x\, e^{-x^2} \right]_0^{\infty} - \frac{\alpha}{2} \int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos \alpha\, x\, dx$$

El primer término resulta nulo, mientras la integral, vale nuevamente I, luego:

$$\frac{\partial I}{\partial \alpha} = - \frac{\alpha}{2} I$$

Como α, es la única variable independiente en esta ecuación diferencial:

$$\frac{dI}{d\alpha} = - \frac{\alpha}{2} I$$

y separando variables:

$$\frac{dI}{I} = - \frac{\alpha\, d\alpha}{2}$$

Ahora integrando:

$$\text{Ln}\ I = - \frac{\alpha^2}{4} = - \text{Ln}\ A$$

de donde sale:

$$I = A\, e^{- \frac{\alpha^2}{4}}$$

Escribimos entonces:

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos \alpha\, x\, dx = A\, e^{- \frac{\alpha^2}{4}}$$

Para determinar la constante de integración A, basta hacer $\alpha=0$ en esta última ecuación. Se tiene asi:

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = A$$

o sea;

$$A = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

si recordamos el resultado obtenido en el capítulo "Funciones Eulerianas".

Entonces la ecuación (1) dá;

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\cos \alpha x\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\, e^{-\frac{\alpha^2}{4}}$$

---

c) Veremos el cálculo de la integral;

$$I = \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} \alpha x\,dx}{x(x^2 + r^2)} \qquad (1)$$

que se reduce fácilmente a la integración de una ecuación diferencial de 2° orden.

Derivando la ecuación (1) con respecto a α;

$$\frac{\partial I}{\partial \alpha} = \int_0^\infty \frac{\cos \alpha x}{x^2 + r^2}\,dx$$

Una nueva derivación dá;

$$\frac{\partial^2 I}{\partial \alpha^2} = -\int_0^\infty \frac{x \operatorname{sen} \alpha x}{x^2 + r^2} \, dx$$

Ahora, si a esta ecuación restamos la ecuación (1) multiplicada por r^2:

$$\frac{\partial^2 I}{\partial \alpha^2} - r^2 \cdot I = -\int_0^\infty \frac{x \operatorname{sen} \alpha x}{x^2 + r^2} \, dx - \int_0^\infty \frac{r^2 \operatorname{sen} \alpha x \cdot dx}{x(x^2 + r^2)}$$

que se puede escribir:

$$\frac{\partial^2 I}{\partial \alpha^2} - r^2 I = -\int_0^\infty \frac{(x^2 + r^2) \operatorname{sen} \alpha x}{(x^2 + r^2) x} \, dx$$

y simplificando:

$$\frac{\partial^2 I}{\partial \alpha^2} - r^2 I = -\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} \alpha x}{x} \, dx$$

y como esta integral ya ha sido calculada, se encuentra:

$$\frac{\partial^2 I}{\partial \alpha^2} - r^2 I = -\frac{\pi}{2}$$

Con consideramos a r constante, podemos escribir esta ecuación, en la forma:

$$\frac{d^2 I}{d\alpha^2} - r^2 I = -\frac{\pi}{2} \qquad (2)$$

La solución de la ecuación diferencial (2), sin segundo miembro, será:

$$I = Ae^{r\alpha} + Be^{-r\alpha}$$

y para encontrar una solución particular de la ecuación con segundo miembro, pongamos $I = C$ en (2):

Nos queda:

$$-r^2 C = -\frac{\pi}{2}$$

de donde sale: $$C = \frac{\pi}{2r^2}$$

La solución general de (2), es por tanto:

$$I = Ae^{r\alpha} + Be^{-r\alpha} + \frac{\pi}{2r^2}$$

Debemos determinar las constantes A y B:

Observemos, primeramente, que si hacemos que $\alpha \to \infty$ deberemos tener: $A = 0$, ya que el valor de la integral, debe mantenerse finito para esta valor de α, por ser:

$$\text{sen } \alpha x \leq 1$$

La solución se reduce a

$$I = Be^{-r\alpha} + \frac{\pi}{2r^2}$$

Para determinar B, hacemos $\alpha = 0$, y notamos que para este valor del parámetro α la integral se hace nula, de modo que nos queda:

$$B + \frac{\pi}{2r^2} = 0$$

de donde obtenemos: $$B = -\frac{\pi}{2r^2}$$

La solución final resulta, entonces;

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} \alpha x \; dx}{x(x^2 + r^2)} = \frac{\pi}{2r^2} (1 - e^{-r\alpha}) \qquad (3)$$

Por derivaciones o integraciones sucesivas de ambos miembros de las ecuaciones tales como (3), podemos obtener numerosas otras integrales definidas.

Derivando, por ejemplo, la ecuación (3), con respecto a α ;

$$\int_0^\infty \frac{\cos \alpha x}{x^2 + r^2} \, dx = \frac{\pi}{2r} e^{-r\alpha} \qquad (4)$$

Si derivamos nuevamente esta ecuación;

$$-\int_0^\infty \frac{x \operatorname{sen} \alpha x}{x^2 + r^2} \, dx = -\frac{\pi}{2} e^{-r\alpha}$$

o sea;

$$\int_0^\infty \frac{x \operatorname{sen} \alpha x}{x^2 + r^2} \, dx = \frac{\pi}{2} e^{-r\alpha}$$

Una nueva derivación con respecto al paráme - tro α , haría divergente la integral.

Derivemos ahora la ecuación (4) dos veces sucesivamente con respecto a r, considerando como parámetro.

Obtenemos, después de algunas reducciones;

$$\int_0^\infty \frac{\cos a\,x\,dx}{(x^2+r^2)^2} = \frac{\pi}{e^{ra}} \cdot \frac{(1+ra)}{4r^3}$$

y:
$$\int_0^\infty \frac{\cos a\,x\,dx}{(x^2+r^2)^3} = \frac{\pi}{e^{ra}} \cdot \frac{r^2a^2+3ra+3}{16r^5}$$

d) Como última aplicación, observaremos como puéden obtenerse rápidamente algunas integrales que, calculadas por los métodos usuales darían lugar a largos desarrollos.

Sean, por ejemplo, las integrales:

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^2} \quad \text{y:} \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^3}$$

Para calcularlas, podemos partir de:

$$\int_0^1 \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{\pi}{4a}$$

Derivando esta ecuación con respecto a a:

$$-\int_0^1 \frac{2a\,dx}{(a^2+x^2)^2} = -\frac{\pi}{4a^2}$$

que dá:
$$\int_0^1 \frac{dx}{(a^2+x^2)^2} = \frac{\pi}{8a^3} \qquad (1)$$

y para $\alpha = 1$:

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{\pi}{8}$$

Derivando la ecuación (1), co. respecto a α:

$$\therefore \int_0^1 \frac{4\alpha\, dx}{(\alpha^2+x^2)^3} = \frac{3}{8\alpha^4}$$

de donde:

$$\int_0^1 \frac{dx}{(\alpha^2+x^2)^3} = \frac{3\pi}{32\alpha^5}$$

y haciendo nuevamente $\alpha = 1$:

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^3} = \frac{3\pi}{32}$$

C) Formación de integrales dobles:

En algunas ocasiones es posible el cálculo de integrales definidas por medio de la formación de integrales dobles, que resultan de las combinaciones de la integral que se trata de avaluar con otras ya conocidas de antemano.

El cálculo de las integrales dobles se hace más fácil, en general, empleando coordenadas polares. Se acostumbra, a menudo, igualar las expresiones de una misma integral en dos tipos diferentes de coordenadas, especialmente en coordenadas ortogonales y polares.

Aplicaciones:

Calcularemos, en primer lugar, la integral:

$$I = \int_0^{\infty} e^{-x^2} \, dx \qquad (1)$$

que hemos empleado en el párrafo anterior y que ya ha sido calculada al tratar de la función Gama.

Podemos escribir, también:

$$I = \int_0^{\infty} e^{-y^2} \, dy \qquad (2)$$

y si multiplicamos miembro a miembro las ecuaciones (1) y (2):

$$I^2 = \int_0^{\infty} e^{-x^2} \, dx \int_0^{\infty} e^{-y^2} \, dy$$

que escrita en forma de integral doble, queda:

$$I^2 = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} \, dx \, dy$$

Pasando a coordenadas polares, hacemos:

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \operatorname{sen} \theta$$

y reemplazamos el elemento dx dy por el correspondiente: r dr dθ.

Nos queda:

$$I^2 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\infty} e^{-r^2} \, r \, dr \, d\theta$$

Escribimos:

$$I^2 = \int_0^{\infty} e^{-r^2} \; r \, dr \int_0^{\pi/2} d\theta$$

e integrando sobre θ ;

$$I^2 = \frac{\pi}{2} \int_0^{\infty} e^{-r^2} \; r \, dr = \frac{\pi}{4} \; e^{-r^2} \; d(r^2)$$

Calculamos la última integral:

$$I^2 = \frac{\pi}{4} \left[e^{-r^2} \right]_{\infty}^{0} = \frac{\pi}{4}$$

Extrayendo raíz y recordando la ecuación (1), obtenemos:

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} \; dx = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$$

Si observamos que la función e^{-x^2} es una función par, deducimos inmediatamente que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \, dx = \sqrt{\pi}$$

Ahora, si se cambia en esta ecuación x por $\frac{x}{\sqrt{2}}$ se obtiene:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \, dx = \sqrt{2\pi}$$

Por integración directa, se encuentra en seguida:

$$\int_0^{\infty} x \; e^{-\frac{x^2}{2}} \, dx = 1$$

y por integración por partes, puede obtenerse:

$$\int_0^\infty x^2 \, e^{-\frac{x^2}{2}} \, dx = \frac{1}{2}\sqrt{2\pi}$$

Podríamos seguir calculando de esta manera las integrales de la forma:

$$\int_0^\infty x^n \, e^{-\frac{x^2}{2}} \, dx$$

pero advirtiendo la semejanza de esta última con una de las expresiones de la función Gama, consideramos innecesario seguir adelante este estudio ya que el lector podrá recurrir al capítulo correspondiente, cuando lo necesite.

Las integrales de este tipo, son frecuentes en problemas de Estadística.

---

b) Calcular la integral:

$$I = \int_0^\infty \cos x^2 \, dx \qquad (1)$$

Esta integral es impropia y su función sub-integral ni siquiera tiende hacia cero cuando su variable $x \to \infty$

Se conoce con el nombre de integral de Fresnel y aparece frecuentemente en la teoría de la luz.

Para calcularla, multipliquemos la ecuación (1) por la ecuación:

$$\int_0^\infty e^{-y^2} \, dy = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$$

Obtenemos así:

$$\int_0^\infty \cos x^2 \, dx \cdot \int_0^\infty e^{-y^2} \, dy = \frac{I}{2} \sqrt{\pi}$$

que escribimos como integral doble en la forma:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \cos x^2 \; e^{-y^2} \, dx \, dy = \frac{I}{2} \sqrt{\pi}$$

Pasaremos ahora a coordenadas polars, haciendo:

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \operatorname{sen} \theta$$

y cambiando el elemento dx y dy por r dr d θ, obtenemos:

$$\frac{1}{2} I \sqrt{\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^\infty e^{-r^2} \operatorname{sen}^2 \theta \cos(r^2 \cos^2 \theta) \, r \, dr \, d\theta$$

Cambiemos aquí la variable r por una nueva variable u, de modo que:

$$r^2 \cos^2 \theta = u$$

o sea: $r^2 = \dfrac{u}{\cos^2 \theta}$; $r \, dr = \dfrac{du}{2 \cos^2 \theta}$

ya que al cambiar r por u, consideramos a θ como si fuera constante.

Tendremos entonces:

$$\frac{1}{2} I\sqrt{\pi} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{2\cos^2\theta} \int_0^{\infty} e^{-u\, tg^2\theta} \cos u\, du \qquad (2)$$

Para calcular la integral sobre u, recordemos la fórmula empleada en una de las aplicaciones del párrafo anterior;

$$\int_0^{\infty} e^{-mx} \cos \alpha x\, dx = \frac{m}{\alpha^2 + m^2}$$

y apliquémosla al caso en que;

$$m = tg^2\theta \quad y \quad \alpha = 1$$

obtenemos; $$\int_0^{\infty} e^{-u\, tg^2\theta} \cos u\, du = \frac{tg^2\theta}{1 + tg^4\theta}$$

Con ésto la ecuación (2) queda:

$$\frac{1}{2} I\sqrt{\pi} = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{tg^2\theta}{1 + tg^4\theta} \frac{d\theta}{\cos^2\theta}$$

y se puede escribir;

$$I\sqrt{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{tg^2\theta}{1 + tg^4\theta} d(tg\,\theta) \qquad (3)$$

Esta integral puede calcularse descomponiendo la función sub-integral en fracciones parciales, o bien por aplicación de la teoría de las funciones de variable compleja, como veremos más adelante. Su valor es; $\frac{\pi}{4}\sqrt{2}$ que introducido en (3) dá;

$$I = \frac{1}{4}\sqrt{2\pi}$$

El resultado final, queda entonces;

$$\int_0^\infty \cos x^2 \, dx = \frac{1}{4}\sqrt{2\pi}$$

Por un proceso análogo podría mostrarse que también;

$$\int_0^\infty \operatorname{sen} x^2 \, dx = \frac{1}{4}\sqrt{2\pi}$$

D) Desarrollo en serie de funciones sub-integrales;

Este método consiste en desarrollar en serie la función sub-integral, o parte de ella e integrar luego cada uno de los términos de la serie obtenida, sumando en seguida los resultados.

Se observa, entonces, que el problema se reduce a la suma de una serie de términos constantes, que son funciones de los límites de la integral propuesta.

Si deseáramos llevar a cabo una demostración rigurosa de este procedimiento; deberíamos justificar el cambio del orden Integración-Suma.

Un ejemplo de éste procedimiento hemos resuel-

-to en el Capítulo "Funciones Eulerianas", cuando avaluamos la integral:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{n-1}\,dx}{1+x} = \frac{\pi}{\operatorname{sen} n\pi}$$

Resolvamos una segunda aplicación:

Sea, por ejemplo, calcular la integral:

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Ln}\left(\frac{1}{x}\right)}{1-x^2}\,dx$$

Evidentemente:

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Ln} x}{1-x^2}\,dx$$

Observemos desde ulluego que esta integral es triplemente impropia; Primeramente, cuando $x \to 0$, $\operatorname{Ln} x \to -\infty$, pero: $\int \operatorname{Ln} x\,dx$ converge para este valor de x.

En seguida, cuando $x \to 1$, la función sub-integral, toma la forma: $\frac{0}{0}$, pero el cuociente de las derivadas:

$$\frac{\frac{1}{x}}{-2x} \to \frac{1}{2}$$

Finalmente:

$$\int \frac{\operatorname{Ln} x}{x^2}\,dx$$

converge cuando $x \longrightarrow \infty$.

Para calcular nuestra integral, pongamos entonces:

$$I = -\int_0^1 \frac{\operatorname{Ln} x}{1-x^2}\,dx - \int_1^\infty \frac{\operatorname{Ln} x}{1-x^2}\,dx \qquad (1)$$

Consideremos la última integral, y hagamos en ella el cambio de variable:

$$x = \frac{1}{u} \quad ; \quad dx = -\frac{du}{u^2}$$

Entonces:

$$\int_1^\infty \frac{\operatorname{Ln} x}{1-x^2}\,dx = -\int_1^0 \frac{\operatorname{Ln}\left(\frac{1}{u}\right)}{1-\frac{1}{u^2}} \cdot \frac{du}{u^2} = \int_0^1 \frac{\operatorname{Ln} u}{1-u^2}\,du$$

Introduciendo este resultado en (1):

$$I = -2\int_0^1 \frac{\operatorname{Ln} x}{1-x^2}\,dx$$

Desarrollaremos la función: $\frac{1}{1-x^2}$ en serie de potencias:

Obtenemos así:

$$I = -2\int_0^1 \operatorname{Ln} x \cdot (1 + x^2 + x^4 + x^6 + \ldots + x^{2n} + \ldots)\,dx$$

que escribimos;

$$I = -2\int_0^1 \operatorname{Ln} x \cdot \sum_1^\infty x^{2n}\, dx$$

o sea;

$$I = -2\sum_1^\infty \int_0^1 x^{2n} \operatorname{Ln} x\, dx \qquad (2)$$

Para calcular esta integral, pongamos;

$$\int_0^1 x^{2n} \cdot \operatorname{Ln} x\, dx = \frac{1}{2n+1} \int_0^1 \operatorname{Ln} x\, d(x^{2n+1})$$

e integrando por partes;

$$\int_0^1 x^{2n} \operatorname{Ln} x\, dx = \frac{1}{2n+1}\left[x^{2n+1} \operatorname{Ln} x\right]_0^1 - \frac{1}{(2n+1)}\int_0^1 x^{2n}\, dx$$

o sea;

$$\int_0^1 x^{2b} \operatorname{Ln} x\, dx = -\frac{1}{(2n+1)^2}$$

Llevando esto resultado a la ecuación (2), obtenemos;

$$I = 2\sum_1^\infty \frac{1}{(2n+1)^2}$$

En el capítulo Series de Fourier, hemos demostrado que;

$$\sum_1^\infty \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

de modo que: $$I = \frac{\pi^2}{4}$$

Nuestro resultado final es de este modo:

$$\int_0^{\infty} \frac{Ln\left(\frac{1}{x}\right)}{1 - x^2}\, dx = \frac{\pi^2}{4}$$

E) Aplicación de las funciones de variable compleja:

La teoría desarrollada en el capítulo Funciones de Variable Compleja, permite la avaluación de gran número de integrales definidas, en general, difíciles de calcular por medio de otros procedimientos.

Aplicaremos primeramente la fórmula deducida en dicho capítulo, para el cálculo de integrales de la forma:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx$$

Elegiremos, para este objeto, una integral que ocupamos anteriormente y cuyo valor debemos verificar. Se trata de:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2\, dx}{1 + x^4} = \frac{\pi}{4}\sqrt{2}$$

Escribamos: $$I = \int_0^{\infty} \frac{x^2\, dx}{1 + x^2} \qquad (1)$$

y hagamos $x = -u$; $dx = -du$.

Entonces:

$$I = -\int_{0}^{\infty} \frac{u^2\,du}{1+u^4} = \int_{-\infty}^{0} \frac{x^2\,dx}{1+x^4} \qquad (2)$$

Sumando (1) y (2):

$$2I = \int_{-\infty}^{0} \frac{x^2\,dx}{1+x^4} + \int_{0}^{\infty} \frac{x^2\,dx}{1+x^4}$$

de donde: $$I = \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} \frac{x^2\,dx}{1+x^4} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{z^2}{1+z^4}\,dz$$

Buscamos ahora las raíces complejas de la ecuación:

$$z^4 + 1 = 0$$

Escribimos: $$z^4 = -1 = e^{\pi i}$$

de donde: $$z = e^{\frac{\pi i}{4}}$$

Como consideraremos solamente las raíces situadas en el semi-plano positivo, deducimos:

$$z_1 = e^{\frac{\pi i}{4}}$$
$$z_2 = e^{\frac{3\pi i}{4}}$$

Según la fórmula antes mencionada, se tiene entonces:

$$2I = 2\pi i \left[\frac{z_1^2}{4 z_1^3} + \frac{z_2^2}{4 z_2^3} \right]$$

Amplificando la primera fracción por z_1 y la segunda por z_2:

$$I = \pi i \left[\frac{z_1^3}{4 z_1^4} + \frac{z_2^3}{4 z_2^4} \right]$$

Observando ahora que:

$$z_1^4 = z_2^4 = -1$$

ya que ambos complejos satisfacen la ecuación $z^4 + 1 = 0$, escribimos que:

$$I = -\frac{\pi i}{4} (z_1^3 + z_2^3)$$

Calculemos:

$$z_1^3 = e^{\frac{3\pi i}{4}} = \cos \frac{3\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{3\pi}{4} = -\cos \frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4}$$

$$z_2^3 = e^{\frac{9\pi i}{4}} = e^{\frac{\pi i}{4}} = \cos \frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4}$$

Sumando: $$z_1^3 + z_2^3 = 2 i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4}$$

con lo cual: $$I = \frac{\pi}{2} \operatorname{sen} \frac{\pi}{4}$$

o sea:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2\,dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{4}\sqrt{2}$$

Aplicaremos ahora la teoría de las funciones de variable compleja al cálculo de las integrales:

$$\int_0^{\infty} y^{m-1} \cos y\,dy \quad \text{e} \quad \int_0^{\infty} y^{m-1} \operatorname{sen} y\,dy \qquad 0<m<1$$

Consideremos para esto, la función de variable compleja:

$$f(z) = z^{m-1}\ e^{-z}$$

y observemos que ella presenta una singularidad para el punto $z=0$.

Calculemos la integral:

$$\int_C f(z)\ dz$$

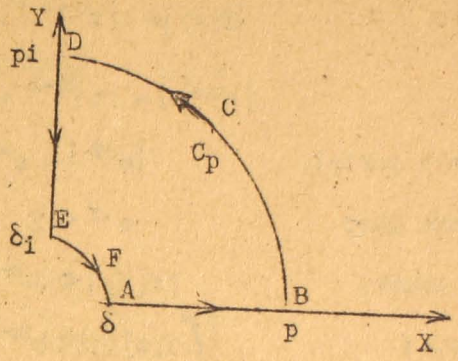
a lo largo de una curva cerrada (C), que no incluya al punto $z=0$.

Elijamos para esto, la curva A B C D E F A formada por dos trozos rectilíneos y por los arcos B C D y E F A, tomados sobre dos circunferencias de centro O y de radios iguales a $\underline{\delta}$ y $\underline{p}$ respectivamente.

Según lo visto en el capítulo correspondiente:

$$\int_{\delta}^{p} f(z)\,dz + \int_{Cp} f(z)\,dz + \int_{pi}^{\delta i} f(z)\,dz + \int_{C\delta} f(z)\,dz = 0$$

(Ver figura en la pág. siguiente:



ya que la función:

$$f(z) = z^{m-1} \; e^{-z} = e^{(m-1)\,\mathrm{Log}\, z - z}$$

es analítica regular dentro del circuito que consideramos.

Para calcular las integrales:

$$\int_{C\delta} f(z)\, dz \qquad e \qquad \int_{Cp} f(z)\, dz$$

aplicaremos el siguiente principio:

Si sobre una curva (C) se verifica que:

$$|f(z)| < F(z)$$

Se tiene:

$$\left| \int_C f(z)\, dz \right| < \int_C F(z)\, ds$$

siendo ds un elemento de arco tomado sobre la curva (C).

Escribamos entonces:

$$f(z) = z^{m-1} \; e^{-z}$$

y tendremos para la integral a lo largo de C_δ :

$$|f(z)| = |z^{m-1}| \cdot |e^{-z}|$$

y como: $|z^{m-1}| = |z|^{m-1} = \delta^{m-1}$

y por otra parte: $|e^{-z}| = e^{-x}$

Observando que: $e^{-x} < 1$

podemos poner: $|f(z)| < \delta^{m-1}$

y con esto: $\left|\int_{C\delta} f(z)\,dz\right| < \delta^{m-1} \int ds$

o sea:

o sea: $$\left|\int_{C\delta} f(z)\,dz\right| < \delta^{m-1}\ \frac{\pi\,\delta}{2} = \frac{\pi}{2}\,\delta^m$$

que $\longrightarrow 0$ cuando $\delta \longrightarrow 0$.

Apliquemos luego la ecuación

$$|f(z)| = |z^{m-1}|\ |e^{-z}|$$

al cálculo de la integral:

$$\int_{Cp} f(z)\ dz$$

Observando que:

$$|z^{m-1}| = |z|^{m-1} = p^{m-1}$$

y luego poniendo: $z = pe^{i\theta}$

obtenemos: $dz = pi\ e^{i\theta}\ d\theta$

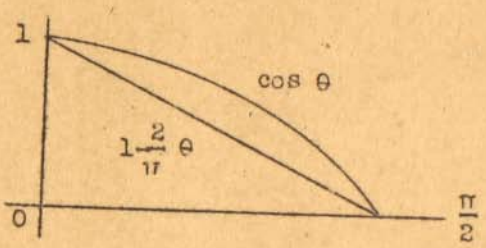
de donde: $|dz| = p\ d\theta$

Por otra parte:

$$|e^{-z}| = e^{-x} = e^{-p\cos\theta}$$

Del gráfico podemos sacar en seguida que:

$$\cos\theta \geq 1 - \frac{2}{\pi}\theta$$



Con lo cual $$|e^{-z}| \leq e^{-p(1-\frac{2}{\pi}\theta)}$$

y entonces: $$\left|\int_{Cp} f(z)\,dz\right| \leq p^m \int_0^{\pi/2} e^{-p(1-\frac{2}{\pi}\theta)}\,d\theta$$

Efectuando la integración, se obtiene:

$$\left|\int_{Cp} f(z)\,dz\right| \leq \frac{\pi}{2} p^{m-1}(1 - e^{-p}) < \frac{\pi}{2} p^{m-1}$$

expresión que tiende a cero cuando $p \longrightarrow \infty$, ya que $m - 1 < 0$.

$$\int_{pi}^{\delta i} f(z)\,dz$$

observamos que;

$$z = yi \quad ; \quad dz = i\ dy$$

Entonces se tiene;

$$\int_{pi}^{\delta i} z^{m-1}\, e^{-z}\, dz = e^{\frac{m\pi i}{2}} \int_{p}^{\delta} y^{m-1}\, e^{-iy}\, dy$$

Haciendo ahora que;

$$\delta \longrightarrow o$$

y

$$p \longrightarrow \infty$$

se tiene;

$$\lim_{\substack{\delta \to o \\ p \to \infty}} \int^{\delta i} z^{m-1}\, e^{-z} dz = e^{\frac{m\,i}{2}} \int_{\infty}^{o} y^{m-1}\, e^{-iy} dy$$

y por otra parte;

$$\lim_{\substack{\delta \to o \\ p \to \infty}} \int_{\delta}^{p} z^{m-1}\, e^{-z}\, dz = \int_{o}^{\infty} x^{m-1}\, e^{-x}\, dx = \Gamma(m)$$

Reemplazando las cuatro integrales por sus valores en la ecuación (3), se obtiene después de pasar al límite;

$$e^{\frac{m\pi i}{2}} \int_{\infty}^{o} y^{m-1}\, e^{-iy}\, dy + \Gamma(m) = 0$$

$$\int_0^\infty y^{m-1} e^{-iy}\, dy = \Gamma(m)\; e^{-\frac{m\pi i}{2}}$$

que se puede escribir;

$$\int_0^\infty y^{m-1}(\cos y - i \operatorname{sen} y)\, dy = \Gamma(m) \cdot (\cos \tfrac{m\pi}{2} - i \operatorname{sen} \tfrac{m\pi}{2})$$

y separando partes real e imaginaria;

$$\int_0^\infty y^{m-1} \cos y\, dy = \Gamma(m) \cos \tfrac{m\pi}{2}$$

$$\int_0^\infty n^{m-1} \operatorname{sen} y\, dy = \Gamma(m) \operatorname{sen} \tfrac{m\pi}{2}$$

C A L C U L O D E V A R I A C I O N E S

GENERALIDADES:

Entre los problemas interesantes del Cálculo Diferencial, se cuenta la determinación de los valores máximos o mínimos de funciones conocidas de una o más variables.

Si tenemos una función:

$$U = f(x,y,z,\ldots)$$

que depende de varias variables independientes entre sí, podemos, con ayuda de la Teoría de los Máximos y Mínimos, determinar los valores: x_o, y_o, z_o, ... de esta variable que producen valores extremos de nuestra función U.

Plantearemos, en este capítulo, un problema de máximos y mínimos, de naturaleza algo diferente al que hasta ahora hemos conocido, y que dá origen a la teoría conocida con el nombre de Cálculo de Variaciones.

Previamente, intentaremos resolver algunos problemas particulares de esta índole.

Supongamos un sistema de ejes coordenados (X Y) y consideremos dos puntos $P_o(x_o, y_o)$ y $P_1(x_1, y_1)$ situados en su plano.

Evidentemente, podremos encontrar infinitas curvas que unan ambos puntos, pero, pretendemos elegir, entre éstas, aquella según la cual, la distancia entre dichos puntos tenga valor mínimo.

Analíticamente, el problema consiste en la determinación de una cierta función y(x), que haga mínimo el valor de la integral:

$$s = \int_{x_o}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2}\ dx$$

Como más adelante lo mostraremos, la función que cumple con estas condiciones, es la función lineal, lo que constituye un hecho, por lo demás, evidente.

Consideremos en seguida un móvil, que se deslize libremente sobre una curva situada en un plano vertical.

Suponiendo que dicho móvil se mueve bajo la acción de la gravedad, se pide determinar la forma de su trayectoria, para que el tiempo transcurrido al trasladarse entre dos posiciones del plano sea mínimo.

Si contamos las distancias, a partir del punto en que el móvil tiene velocidad nula, podremos escribir la ecuación de las fuerzas vivas, en la forma:

$$\frac{1}{2} m v^2 = m g y$$

o sea:

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{2 g y}$$

que dá:

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{2 g y}}$$

y reemplazando ds, e integrando:

$$t = \int_{x_o}^{x_1} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{2 g y}} dx$$

La determinación de la función $y = y(x)$, que sustituída en esta ecuación, produce un valor mínimo de t, constituye un problema de Cálculo de Variaciones, al igual que la resolución del problema que antes que éste hemos propuesto.

El planteamiento de problemas de esta índole, conduce, en general, a cuestiones de Cálculo de Variaciones, cuyas generalidades pasaremos a estudiar en seguida.

Supongamos, para ésto, la existencia de una función I, que definiremos por medio de la ecuación:

$$I = \int_a^b F(x, y, y') dx \qquad a \leq x \leq b \qquad (1)$$

y que según podemos apreciar, depende de la forma de la función $y = y(x)$ que hemos supuesto desconocida.

La tarea fundamental del Cálculo de Variaciones, consiste en la determinación de la función $y(x)$ que, por intermedio de la ecuación (1), produce un valor extremo de la función I.

Nos ocuparemos en seguida de esta determinación, estableciendo previamente una propiedad que necesitaremos en nuestra deducción.

Lema:

Supongamos una función $R(x)$, continúa y de forma conocida, y definida en el intervalo $a \leqslant x \leqslant b$.

Sea, además, $S(x)$ una función arbitraria de x, definida en el mismo intervalo, y sometida a la única condición que:

$$S(a) = S(b) = 0$$

Demostraremos, que si se verifica que:

$$\int_a^b R(x) \cdot S(x) \, dx = 0 \qquad (2)$$

debe cumplirse, necesariamente que:

$$R(x) = 0$$

Supongamos, para ello, que para un punto $a < c < b$, del intervalo, se verifique:

$$R(c) > 0$$

lo que será siempre posible, ya que de lo contrario bastaría considerar la función $-R(x)$.

Consideremos, alrededor de este punto, un intervalo:

$$c - h \leqslant x \leqslant c + h$$

tan pequeño, que se verifique en él:

$$R(x) \quad 0$$

Si definimos entonces la función S(x), de modo que:

$$S(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } a \leqslant x \leqslant c-h \\ h^2 - (x-c)^2 & \text{para } c-h \leqslant x \leqslant c+h \\ 0 & \text{para } c+h \leqslant x \leqslant b \end{cases}$$

tendremos:

$$\int R(x)\ S(x)\ dx = \int_{c-h}^{c+h} R(x) \left[h^2 - (x-c)^2 \right] dx$$

lo que muestra que:

$$\int_a^b F(x)\ S(x)\ dx > 0$$

Esta ecuación, como se vé, resulta incompatible con la ecuación (2), a menudo que se verifique:

$$R(x) = 0$$

Determinación de la función y(x):

Escribamos nuevamente la ecuación (1) en la forma:

$$I(y) = \int_a^b F(x,y,y') \quad dx \qquad (3)$$

y tratemos de determinar la función $y = y(x)$, de modo que $I(y)$ sea máximo o mínimo.

Impondremos a la función desconocida la condición de tomar valores dados para los puntos que limitan el intervalo.

Se supone entonces que:

$$y(a) = A \quad ; \quad y(b) = B$$

Consideremos en seguida una función arbitraria s(x) que cumpla con la única condición de ser:

$$s(a) = s(b) = 0$$

Evidentemente, todas las funciones de la forma:

$$Y(x) = y(x) + \lambda s(x) \qquad (4)$$

en que λ es un parámetro variable, cumplen con la condición:

$$Y(a) = A \quad ; \quad Y(b) = B$$

Podremos escribir, entonces:

$$I(Y) = I(y + \lambda s)$$

$$I(y) = I(y + 0 \cdot s)$$

o sea la función I(Y) deberá tener su máximo valor para $\lambda = 0$. Deberá verificarse entonces:

$$\frac{\partial I(Y)}{\partial \lambda} = 0 \qquad \text{para } \lambda = 0$$

De la ecuación (3), puede obtenerse:

$$I(Y) = \int_a^b F(x,\ y + \lambda s,\ y' + \lambda s')\ dx$$

y derivando totalmente respecto a λ , y poniendo $\lambda = 0$

$$\left[\frac{\partial I(Y)}{\partial}\right]_{\lambda=0} = \int_a^b \left[\left(\frac{\partial F}{\partial y}\ \frac{\partial Y}{\partial \lambda}\right)_{\lambda=0} \left(\frac{\partial F}{\partial y'}\ \frac{\partial Y'}{\partial \lambda}\right)_{\lambda=0}\right] dx = 0 \qquad (5)$$

Derivando ahora la ecuación (4) con respecto a x:

$$Y'(x) = y'(x) + \lambda s'(x) \qquad (6)$$

y derivando las ecuaciones (4) y (6), parcialmente con respecto a λ :

$$\frac{\partial Y}{\partial \lambda} = s(x)$$

y

$$\frac{\partial Y'}{\partial \lambda} = s'(x)$$

Sustituyamos estos valores en la ecuación (5), observando que ellos resultan independientes de λ:

$$\int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y} \cdot s(x) + \frac{\partial F}{\partial y'} \cdot s'(x)\right] dx = 0$$

Integrando por partes el segundo término, la ecuación anterior se transforma en:

$$\int_a^b \frac{\partial F}{\partial y} s(x)\ dx + \left[\frac{\partial F}{\partial y'} s(x)\right]_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx}\ \frac{\partial F}{\partial y'} s(x)\ dx = 0$$

El segundo término se anula, ya que:

$$s(a) = s(b) = 0$$

con lo cual la ecuación se reduce a:

$$\int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\right).s(x)\,dx = 0$$

Recordando que la función s(x) es arbitraria y aplicando el Lema demostrado en el parrafo anterior, deducimos que:

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0} \qquad (6)$$

Esta expresión se llama "Derivada de Variación", e igualada con cero, constituye una ecuación diferencial de segundo orden respecto a la función $y = y(x)$. La determinación de esta función puede conseguirse por integración de la ecuación diferencial anterior.

Por ser esta ecuación de segundo orden, su solución deberá contener dos constantes arbitrarias, que pueden determinarse de acuerdo con las condiciones:

$$y(a) = A \quad ; \quad y(b) = B$$

Estudiaremos en seguida algunos casos particulares, que, en general, facilitan la integración de la ecuación (6).

Casos especiales:

Podemos considerar tres casos fundamentales, según que en la función sub-integral no aparezca la variable independiente, la función $y(x)$, o su derivada $y'(x)$.

a) Caso en que $F = F(x, y')$

Si la función sub- integral F no contiene a la

función y(x), evidentemente;

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

con lo cual la ecuación (6) se reduce a;

$$\frac{d}{dx}\ \frac{\partial F}{\partial y'} = 0$$

cuya integración inmediata dá;

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial y'} = \text{Cte}}$$

El problema queda en este caso reducido a la integración de una ecuación diferencial de primer orden. No obstante, la aparición de dos constantes arbitrarias en su solución, exige la imposición de dos condiciones para su determinación.

b) Caso en que $F = F(y, y')$;

Podremos escribir, en este caso;

$$I(y) = \int_a^b F(y, y')\, dx \qquad (8)$$

Si llamamos;. $x' = \frac{dx}{dy}$

tendremos; $y' = \frac{1}{x'}$

con lo cual la ecuación (8) se transforma en;

$$I(y) = \int_A^B F(y, \frac{1}{x'})x'\, dy$$

Llamaremos f a la nueva función sub-integral, o sea escribamos:

$$f(y, x') = x' \; F(y, \frac{1}{x'}) \qquad (9)$$

Si recordamos ahora, que la función sub-integral:

$$F = F(x, y')$$

del caso anterior, satisface la ecuación diferencial:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0$$

deducimos que la nueva función:

$$f = f(y, x')$$

deberá cumplir la ecuación:

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dy} \frac{\partial f}{\partial x'} = 0$$

Considerando que en la función f no aparece la variable x, deducimos que:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

con lo cual la ecuación diferencial se reduce a:

$$\frac{d}{dy} \frac{\partial f}{\partial x'} = 0$$

e integrando:

$$\frac{\partial f}{\partial x'} = C^{te}$$

Sacando el valor de f de la ecuación (9) obtenemos:

$$\frac{\partial}{\partial x'}\left[x' F\left(y, \frac{1}{x'}\right)\right] = C^{te}.$$

y desarrollando la derivada:

$$F\left(y, \frac{1}{x'}\right) - x' \frac{\partial F\left(y, \frac{1}{x'}\right)}{\partial y'} \cdot \frac{1}{x'^2} = C^{te}.$$

Reduciendo y recordando el valor de x', obtenemos la ecuación diferencial final en la forma:

$$\boxed{F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} = C^{te}.} \qquad (10)$$

Sobre esta ecuación puede decirse lo mismo que se agregó a la ecuación (7).

c) Caso en que $F = F(x, y)$:

Si en la función F no aparece la función $y'(x)$, es evidente que:

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$$

Con esto, la ecuación diferencial (6) se reduce a:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 0 \qquad (11)$$

Esta ecuación, sólo en determinadas ocasiones, dá solución a nuestro problema.

No desarrollaremos más allá, esta introducción al Cálculo de Variaciones ya que consideramos que los elementos desarrollados en estas breves páginas son suficientes para la solución de muchos de los problemas que se presentan en la práctica.

Aplicaciones:

Consideremos nuevamente el problema de la mínima distancia entre dos puntos de un plano.

Habíamos establecido:

$$s = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2}\ dx$$

y pedíamos determinar la función $y = y(x)$, de modo que el arco s tuviera mínimo valor.

Como la función sub-integral no contiene a la función $y(x)$, podemos aplicar la ecuación (7):

Tenemos que:

$$F = \sqrt{1 + y'^2}$$

de donde sacamos: $\dfrac{\partial F}{\partial y'} = \dfrac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}$

y como: $$\frac{\partial F}{\partial y'} = C^{te}$$

en virtud de la ecuación citada, obtenemos:

$$\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = C^{te}_{.}$$

Si damos a la constante el valor:

$$C^{te}_{.} = \operatorname{sen} \alpha$$

siendo α otra constante, obtenemos:

$$\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \operatorname{sen} \alpha$$

de donde: $$y' = \operatorname{tg} \alpha$$

Multiplicando etesta ecuación por dx e integrando, se encuentra:

$$y = \operatorname{tg} \alpha \cdot x + n$$

que representa una recta que forma un ángulo α con el eje de las abscisas, e intercepta en el eje de las ordenadas un segmento de longitud n.

---

b) Braquistócrona.:

Recordemos el problema que planteamos en las primeras páginas de este capítulo, referente a un móvil que cae en un plano vertical, sometido a la gravedad.

Obtuvimos la ecuación:

$$t = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}\, dx$$

Se trata, ahora, de determinar la función $y(x)$ de modo que el tiempo de caída sea mínimo.

Observando que la función:

$$F = \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{y}}$$

no contiene a la variable x, podemos aplicar a nuestro problema la ecuación (10):

Calculemos:

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{y}\sqrt{1 + y'^2}}$$

y reemplacemos estos valores en la ecuación:

$$F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} = C^{te}.$$

Obtenemos:

$$\frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{y}} - \frac{y'^2}{\sqrt{y}\sqrt{1 + y'^2}} = C^{te}.$$

o sea:

$$\frac{1}{\sqrt{y}\sqrt{1 + y'^2}} = C^{te}.$$

de donde:

$$\sqrt{y}\sqrt{1 + y'^2} = C^{te}.$$

Elevando al cuadrado y dando a la constante el valor $2a$, obtenemos:

$$y'(1 + y'^2) = 2a$$

de donde sacamos:

$$y' = \frac{2a - y}{y}$$

Separando las variables e integrando:

$$x = \int \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{2a - y}}\, dy + b$$

Hagamos el cambio de variable:

$$y = 2a \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2}$$

$$dy = 2a \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}\, d\theta$$

Nuestra ecuación se reduce a:

$$x = 2a \int \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2}\, d\theta + b$$

que se escribe:

$$x = a \int (1 - \cos \theta)\, d\theta + b$$

e integrando: $x = a(\theta - \operatorname{sen} \theta) + b$

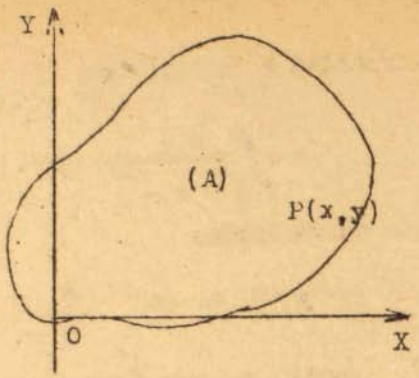
La curva buscada, que tiene el nombre de Braquistócrona, tiene entonces por ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = a(\theta - \operatorname{sen}\theta) + b \\ y = a(1 - \cos\theta) \end{cases}$$

que son las ecuaciones de una Cicloide.

c) Problema Isoperimétrico:

Se dispone de una cuerda de largo L. Si se forma con ella una curva cerrada, se pretende saber cual ha de ser su ecuación, para que el área encerrada por la curva tenga valor máximo.



Consideremos fijo el punto inicial de la cuerda, y hagamos pasar por él un sistema de ejes coordenados (X Y).

Trataremos de establecer las ecuaciones paramétricas de la curva que cumpla con la condición ya enunciada, para lo cual, elegiremos como parámetro el arco s, que mediremos a partir del origen.

Tendremos entonces:

$$\left.\begin{aligned} x &= x(s) \\ y &= y(s) \end{aligned}\right\} \quad 0 \leq s \leq L$$

Evidentemente, se verifica:

$$dx^2 + dy^2 = ds^2$$

o sea:

$$dx = \sqrt{1 - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\ ds$$

que escribimos simplemente:

$$dx = \sqrt{1 - y'^2}\ ds$$

Ahora, el área encerrada por la curva será;

$$A = \int_0^L y \, dx$$

o sea;

$$A = \int_0^L y \sqrt{1 - y'^2} \, ds$$

Debemos determinar y(s) de tal manera que hagamos máximo el valor del área A.

Observando que la variable s está excluída de la función sub-integral, aplicamos la ecuación (10) para la determinación de y(s).

Escribimos;

$$F = y \sqrt{1 - y'^2}$$

y calculamos inmediatamente;

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = - \frac{yy'}{\sqrt{1 - y'^2}}$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación;

$$F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} = C^{te}$$

tendremos;

$$y \sqrt{1 - y'^2} + \frac{yy'^2}{\sqrt{1 - y'^2}} = C^{te}$$

y reduciendo;

$$\frac{y}{\sqrt{1 - y'^2}} = R$$

dando el valor R a la constante.

Elevando al cuadrado y despejando y' :

$$y' = \frac{\sqrt{R^2 - y^2}}{R}$$

Separando las variables e integrando:

$$s = R \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{R^2 - y^2}}$$

luego: $s = R \text{ arc sen } \frac{y}{R}$

de donde sacamos $y = R \text{ sen } \frac{s}{R}$

Para calcular x, escribimos:

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 = 1 - \left(\frac{dy}{ds}\right)^2$$

y teniendo en cuenta que:

$$\frac{dy}{ds} = \cos \frac{s}{R}$$

$$\frac{dx}{ds} = \text{sen } \frac{s}{R}$$

Multiplicando esta ecuación por ds e integrando:

$$x = \int_0^s \text{sen } \frac{s}{R} \, ds$$

o sea: $x = R\left(1 - \cos \frac{s}{R}\right)$

La curva buscada es por tanto una circunferencia y sus ecuaciones paramétricas son:

$$\begin{cases} x = R(1 - \cos \frac{s}{R}) \\ y = R \operatorname{sen} \frac{s}{R} \end{cases}$$

La eliminación del parámetro s dá:

$$x^2 + y^2 - 2 R x = 0$$

que muestra que la circunferencia resultante es tangente al eje O Y en el origen.

---

d) Haremos por último una aplicación al caso general, en que en la función sub-integral se encuentran presentes: La variable independiente x, la función y(x) y su derivada y'(x).

Tratemos de determinar la función y = y(x), de modo que la integral:

$$I(y) = \int_{x_0}^{x_1} x\, y\, y'^2 \, dx$$

tenga valor extremo:

Llamemos: $F = x\, y\, y'^2$

Calculemos: $\frac{\partial F}{\partial y} = x\, y'^2$

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = 2\, x\, y\, y'$$

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 2\, y\, y' + 2\, x\, y'^2 + 2\, x\, y\, y''$$

Reemplazando estos valores en la ecuación:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0$$

que se aplica al caso general, obtenemos:

$$x\,y'^2 - 2\,y\,y' - 2\,x\,y'^2 - 2\,x\,y\,y'' = 0$$

y reduciendo:

$$2\,x\,y\,y'' + x\,y'^2 + 2\,y\,y' = 0$$

Para integrar esta ecuación diferencial, podemos multiplicarla por: $\frac{y}{x}$, obteniendo con esto:

$$2\,y\,y'\,y'' + y'^3 + \frac{2}{x}\,y\,y'^2 = 0$$

que puede escribirse:

$$\frac{d}{dx}(y\,y'^2) + \frac{2}{x}\,y\,y'^2 = 0$$

Poniendo: $y\,y'^2 = u$

la ecuación se reduce a: $\frac{du}{dx} + \frac{2u}{x} = 0$

Separando variables:

$$\frac{du}{dx} + 2\,\frac{dx}{x} = 0$$

e integrando: $\ln u + \ln x^2 = \ln a^3$

o sea: $u\,x^2 = a^3$

Reemplazando u por su valor y despejando y':

$$y' = \frac{a^{\frac{3}{2}}}{x\sqrt{y}}$$

Separando las variables y luego integrando nuevamente :

$$\int \sqrt{\frac{y}{a}}\ \frac{dy}{a} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\frac{2}{3}\ \left(\frac{y}{a}\right)^{3/2} = \ln\left(\frac{x}{b}\right)$$

que se puede escribir por fin:

$$\left(\frac{y}{a}\right)^{3/2} = \ln\left(\frac{x}{b}\right)^{3/2}$$

TERCERA PARTE

E C U A C I O N E S
D I F E R E N C I A L E S

RESOLUCION NUMERICA DE ECUACIONES DIFERENCIALES:

Estudiaremos en este capítulo, métodos de resolución numérica de ecuaciones diferenciales. Trataremos dos tipos: cuando la ecuación es de la forma $\frac{dy}{dx} = F(s)$, y cuando es de la forma $\frac{dy}{dx} = F(x, y)$.

La ecuación $\frac{dy}{dx} = F(x)$.

En el capítulo "Estudio de una función" vimos el método de Simpson de integración numérica. Aplicaremos aquí este mismo método, ya que la integracion numérica equivale a resolver una ecuación del tipo:

$$\frac{dy}{dx} = F(x) \qquad (1)$$

Vimos que la fórmula de Simpson era:

$$\int_{x_o}^{x_{2n}} y \, dx = \frac{h}{3} \left(y_o + 4\, y_1 + 2\, y_2 + 4\, y_3 + \cdots + 4y_{2n-1} + y_{2n}\right)$$

siendo:

$$x_{2n} = x_o + 2\, n\, h$$

Llamaremos incremento de Simpson el valor:

$$k = \frac{y_o + 4\, y_1 + y_2}{3}\, h$$

Ilustraremos el método con un ejemplo. Sea la ecuación:

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{1 - \frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 \pi x}$$

Le impondremos a la solución, la condición de que pase por el punto (x_o, y_o), o sea:

$$y = y_o + \int_{x_o}^{x} \sqrt{1 - \frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 \pi x \, dx}$$

Llamemos:

$$z = \sqrt{1 - \frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 \pi x}$$

y tomemos $h = 0,1$. Nos damos:

$$x_o = 0 \qquad y_o = -0,63$$

luego: $z_o = 1$

Veamos como haríamos el cálculo.

Para $x = 0,1$

$$\operatorname{sen}^2 x = \operatorname{sen}^2 18 = 0,097$$

y $$z_1 = 0,976$$

Calculemos z_2:

Para $x = 0,2$; $z_2 = 0,91$

Tenemos que:

$$\int_0^{0,2} z \, dx = \frac{h}{3}(z_o + 4 \, z_1 + z_2) = k$$

$$k = 0,194$$

Luego el valor de y es:

$$y = -0,650 + 0,194 = -0,456$$

Haciendo para cada caso, los cálculos de esta manera obtenemos el cuadro que sigue:

x	z	k	y
0,0	1,000		-0,650
0,1	0,976		
0,2	0,910	0,194	-0,456
0,3	0,842		
0,4	0,745	0,361	-0,289
0,5	0,707		
0,6	0,745	0,505	-0,145

De este modo hemos realizado la integración de la ecuación diferencial, obteniendo como resultado soluciones particulares.

Veremos el otro tipo de ecuación.

La ecuación $\frac{dy}{dx} = F(x, y)$.

Buscaremos un método parecido al de Simpson pare resolver numéricamente la ecuación:

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y)$$

Este será el método llamado de Runge y Kutta.

Hacemos a continuación la deducción de las fórmulas que hay que emplear. Desgraciadamente esta deducción

y justificación del método es larga y engorrosa, por lo cual aconsejamos a los alumnos que no se interesan por esta clase de desarrollos, que se remitan a la aplicación directa del método, pasando por encima su deducción.

Sea;

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y)$$

con un valor inicial;

$$(x_o, y_o)$$

Sea además:

$$k_1 = h\, F(x_o, y_o)$$

$$k_2 = h\, F(x_o + h,\ y_o + k_1)$$

$$k_3 = h\, F(x_o + h,\ y_o + k_2)$$

$$k_4 = h\, F(x_o + 2h,\ y_o + 2k_3)$$

y

$$2k = \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{2}$$

La fórmula que rige para la solución y(x) es:

$$\boxed{y(x_o + 2h) = y_o + 2k + 0\ h5} \qquad (1)$$

(léase: 0 h^5 = del orden de h^5).

Demostraremos esta fórmula.

Siendo

$$F(x_o, y_o) = z_o$$

substituyamos u, v en lugar de x, y de acuerdo con:

$$x = x_0 + u \qquad y = y_0 + z_0\, u + v$$

Tenemos:

$$\frac{dv}{du} = \frac{dy}{dx} - z_0 = F(x_0 + u,\ y_0 + z_0\, u + v) - z_0 = G(u, v) \qquad (2)$$

para el valor inicial $u_0 = v_0 = 0$; $G(u_0, v_0) = 0$.

Definiendo los k para (2) en analogía con los k obtenemos:

$$k1 = h\ G(0,0) = 0 = k_1 - z_0\, h$$

$$\bar{k}_2 = h\, G(h, 0) = h\left[F(x_0 + h,\ y_0 + z_0\, h) - z_0\right] = k_2 - z_0\, h$$

$$\bar{k}_3 = h\, G(h, k_2) = h\left[F(x_0 + h,\ y_0 + z_0\, h + k_2 - z_0\, h) - z_0\right] = k_3 - z_0\, h$$

$$\bar{k}_4 = h\, G(2h, 2\bar{k}_3) = h\left[F(x_0 + 2h,\ y_0 + 2 z_0\, h + 2 k_3 - 2 z_0\, h) - z_0\right] = k_4 - z_0\, h$$

luego en general:

$$\bar{k} = k - z_0\, h$$

De este modo la ecuación (1) se transforma en:

$$y(x_0 + 2h) - y_0 - 2 z_0\, h = 2k + 0\, h^5$$

es decir:

$$v(2h) = 2k + 0\, h5 \qquad (3)$$

Veamos ahora los desarrollos de Taylor de v(u) y de G(u, v) en su relación mútua:

$$v(u) = \frac{A}{2} u^2 + \frac{B}{6} u^3 + \frac{C}{24} u^4 + 0\ u^4 \qquad (4)$$

ya que $v(0) = 0$

$$\left[\frac{dv}{du}\right]_0 = G(0,0) = 0$$

$$G(u,v) = a\ u + b\ v + \frac{c}{2} u^2 + d\ u\ v + \frac{e}{6} u^3 + 0\ u^4 \qquad (5)$$

puesto que $G(0,0) = 0$ y que los términos de v^2, $u^2\ v$, etc., no necesitan anotarse ya que $v = 0\ u^2$, según (4).

Substituyamos (4), (5) en (2):

$$A\ u + \frac{B}{2} u^2 + \frac{C}{6} u^3 + 0\ u^4 = a\ u + b\left(\frac{A}{2}u^2 + \frac{B}{6}u^3\right) + \frac{c}{2} u^2\ \frac{dA}{2} u^3 +$$

$$+ \frac{e}{6}u^3 + 0\ u^4$$

de donde:

$$A = a \qquad B = b\ A + c \qquad C = b\ B + 3\ d\ A + c$$

o finalmente:

$$A = a \qquad B = a\ b + c \qquad C = a\ b^2 + b\ c + 3\ a\ d + e$$

Así obtenemos de (4):

$$V(2\ h) = 2a\ h^2 + \frac{4}{3}(a\ b + c)\ h^3 + \frac{2}{3}(a\ b^2 + b\ c + 3\ a\ d + e)h^4 +$$

$$+ r + 0\ h^5 \qquad (6)$$

Calcularemos ahora los $\bar{k}$;

$$\bar{k}_1 = 0$$

$$\bar{k}_2 = h\,G(h,0) = h\left[a\,h + \frac{c}{h}\,h^2 + \frac{e}{h}\,h^3 + 0\,h^4\right]$$

$$\bar{k}_2 = a\,h^2 + \frac{c}{2}\,h^3 + \frac{e}{6}\,h^4 + 0\,h^5$$

$$\bar{k}_3 = h\,G(h,\ \bar{k}_2) = h\left[a\,h + b\,(a\,h^2 + \frac{c}{2}\,h^3) + \frac{c}{2}\,h^2 + \right.$$
$$\left. + d\,h\,a\,h^2 + \frac{e}{6}\,h^3 + 0\,h^4\right]$$

$$= a\,h^2 + (a\,b + \frac{c}{2})\,h^3 + (\frac{b\,c}{2} + a\,d + \frac{e}{6})\,h^4 + 0\,h^5$$

$$\bar{k}_4 = h\,G(2\,h,\ 2\,\bar{k}_3) = h\left[2\,a\,h + 2\,b(a\,h^2 + a\,b + \frac{c}{2})\,h^3 + \right.$$
$$\left. + 2\,e\,h^2 + 4\,d\,h\,a\,h^2 + \frac{4}{3}\,e\,h^3 + 0\,h^4\right]$$

$$= 2\,a\,h^2 + (2\,a\,b + 2\,c)\,h^3 + (2\,a\,b^2 + b\,c + 4\,a\,d + \frac{4}{3}e)\,h^4 +$$
$$+ 0\,h^5$$

Formando

$$2\,\bar{k} = \frac{\bar{k}_1 + 2\,\bar{k}_2 + 2\,\bar{k}_3 + \bar{k}_4}{3}$$

RESULTA;

$$2\,\bar{k} = 2\,a\,h^2 + \frac{4}{3}(a\,b + c)\,h^3 + \frac{2}{3}\,(a\,b^2 + b\,c + 3\,a\,d + e)\,h^4 +$$
$$+ 0\,h^5$$

lo que coincide con (6) y comprueba (2), con lo cual queda demostrado que:

$$\boxed{y(x_o + 2\,h) = y_o + 2\,k}$$

Si aplicamos esta fórmula a la resolución de la ecuación $\frac{dy}{dx} = F(x)$, llegamos a la fórmula de Simpson. En efecto:

Se tiene:

$$F(x, y) = F(x)$$

y

$$k_1 = h\,F(x_o) = h\;\; z_o$$

$$k_2 = h\,F(x_o + h) = h\;\; z_1$$

$$k_3 = h\,F(x_o + h) = h\;\; z_1$$

$$k_4 = h\,F(x_o + 2\,h) = h\;\; z_2$$

y formando 2 k se tiene:

$$2\,k = h\,\frac{z_o + 2\,z_1 + 2\,z_1 + z_2}{3} = \frac{h}{3}\,(z_o + 4\;\; z_1 + z_2)$$

que es la fórmula de Simpson.

Se nota que en el método de Runge y Kutta el término $4\,z_1$ aparece repartido entre $2\,k_2$ y k_3.

Empleo del método:

Veremos como proceder con este método para resolver las ecuaciones diferenciales.

Teníamos por definición:

$$k_1 = h\,F(x_o, y_o)$$

$$k_2 = h\,F(x_o + h,\ y_o + k_1)$$

$$k_3 = h\,F(x_o + h,\ y_o + k_2)$$

$$k_4 = h\,F(x_o + 2h,\ y_o + 2k_3)$$

y

$$2k = \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{3}$$

El método de resolución está dado por el siguiente esquema siendo dados x_o e y_o:

x	y	F(x, y)	$k_i = hF$	k
x_o	y_o	$F(x_o, y_o$	k_1	$k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4$
$x_o + h$	$y_o + k_1$	$F(x_o + h, y_o + k_1)$	k_2	
$x_o + h$	$y_o + k_2$	$F(x_o + h,\ y_o + k_2)$	k_3	$2k = \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{3}$
$x_o + 2h$	$y_o + 2k_3$	$F(x_o + 2h,\ y_o + 2k_3)$	k_4	
$x_o + 2h$	$y_o + 2k$			

Veamos un ejemplo. Sea la ecuación:

$$\frac{dy}{dx} = y + x - 1$$

nos damos:

$$x_o = 0 \qquad y_o = 1 \quad y\ h = 0{,}2$$

Haciendo los cálculos indicados en el diagrama obtenemos el siguiente cuadro de valores:

x	y	x+y-1	$k_1 = hF$	k
0,0	1,000	0,000	0,000	0,000
				0,080
0,2	1,000	0,200	0,040	0,096
				0,099
0,2	1,040	0,240	0,048	0,275
0,4	1,096	0,496	0,099	2 k = 0,092
0,4	1,092			

1,092 es el valor de la función para x = 0,4.

Si tomamos h = 0,3.

x	y	x+y-1	k_1	k
0,4	1,092	0,492	0,148	0,148
				0,564
0,7	1,240	0,940	0,282	0,644
				0,521
0,7	1,374	1,074	0,322	Σ = 1,877
1,0	1,736	1,736	0,521	2k = 0,626
1,0	1,718			

Es peligroso tomar un h grande. Para saber si h está dentro de los límites aceptables, se pueden observar las columnas F(x, y) o $k_1 = hF$. Si en ellas los valores varían regularmente, h está bien, de lo contrario quiere decir que es grande.

Si los valores de F(x, y) son mayores que 1, debemos cambiar los papeles de x e y, entonces el diagrama queda;

y	x	$\frac{1}{x+y-1}$	k_1	h = 0,3
1,718	1,000	0,582	0,174	0,174
				0,272
2,018	1,174	0,455	0,136	0,280
				0,106
2,018	1,136	0,466	0,140	ε = 0,832
2,318	1,280	0,385	0,106	2 k = 0,277
2,318	1,277			

El gran inconveniente que tiene la solución numérica de estas ecuaciones está en que nos da soluciones particulares de la función y que no podemos tener certeza de la conducta de la curva en los trechos intermedios.

Obtención de la solución de la ecuación con mayor precisión:

Aplicaremos una fórmula similar a la estudiada en la regla del quinceavo, del capítulo "Estudio de una función". La fórmula de Runge y Kutta, como la de Simpson es sólo exacta hasta para términos de cuarto grado. Luego al emplearla se comete un error del orden de h^5.

Trataremos de calcular este error. Para eso hacemos el cálculo con dos intervalos diferentes, uno el doble del otro. Si hacemos primero el cálculo con un intervalo h, tenemos:

$$y(x_o + 2h) = y_o + 2k + a(x_o)\, h5 + \ldots\ldots \qquad (1)$$

$$y(x_o + 4h) = y_o(x_o + 2h) + 2k' + a(x_o + 2h)\, h5 + \ldots \qquad (2)$$

desarrollando $a(x_o + 2h)^5$ en serie de Taylor y empleando el primer término que es $a(x_o)h^5$, se obtiene al sumar (1) y (2).

$$y(x_o + 4h) = y_o + 2k + 2k' + 2a(x_o)h^5 \qquad (3)$$

por otro lado si hacemos el cálculo directamente tomando un intervalo $\underline{2h}$, se obtiene:

$$y(x_o + 4h) = y_o + 2k + a(x_o)(2h)^5 \qquad (4)$$

pero (3) y (4) deben ser iguales, o sea llamando:

$$R_1 = y_o + 2k + 2k'$$

y

$$R_2 = y_o + 2k$$

tenemos:

$$R_1 + 2a h^5 = R_2 + 32a h^5$$

de donde:

$$-30a h^5 = R^2 - R_1$$

y

$$\boxed{2a h^5 = -\frac{R2 - R_1}{15}}$$

siendo $2a h^5$ el error cometido al aplicar la fórmula de Runge y Kutta.

Luego el valor más aproximado de la solución de la ecuación diferencial será :

$$\boxed{R = R_1 - \frac{R_2 - R_1}{15}}$$

Veamos un ejemplo. Sea una ecuación diferencial de Ricatti que queremos resolver:

$$\frac{dy}{dx} = 0,3 + x + y^2$$

Nos damos;

$x_o = 0$ $\quad y_o = 0$ $\quad h = 0,2$

x	y	$0,3+x+y^2$	k_1	
0,0	0,000	0,300	0,0600	
0,2	0,060	0,304	0,1008	Σ = 0,5540
0,2	0,101	0,510	0,1020	2k = 0,1847
0,4	0,204	0,742	0,1484	
0,4	0,185	0,734	0,1468	
0,6	0,332	1,010	0,2020	Σ = 1,2636
0,6	0,387	1,049	0,2098	2k = 0,4212
0,8	0,605	1,466	0,2932	
0,8	0,606			

Tomando h = 0,4. Obtenemos;

x	y	$0,3+x+y^2$	k_1	
0,0	0,000	0,300	0,1200	
0,4	0,120	0,714	0,2858	Σ = 1,936
0,4	0,286	0,782	0,3128	2k = 0,6379
0,8	0,626	1,491	0,5964	
0,8	0,638			

O sea; $R_1 = 0,606$ y $R_2 = 0,638$

Luego: $$R = 0,606 - \frac{0,638 - 0,606}{15}$$

$$R = 0,606 - \frac{0,032}{15}$$

$$R = 0,604$$

Vemos que para seguir el cálculo más allá de y =0,606 debemos tomar un h = 0,1 ya que con h=0,2 tenemos que el error es 0,002.

La regla del quinceavo nos permite controlar el h que se usa. Si el error es muy grande, quiere decir que debemos tomar un h más pequeño.

Sistemas de ecuaciones:

Si se tiene el sistema:

$$\frac{dy}{dx} = F(x,y,z)$$

y

$$\frac{dz}{dx} = G(x,y,z)$$

Podemos resolverlo de igual forma que en los ejemplos anteriores por medio del método de Runge y Kutta, operando según se indica en el cuadro siguiente:

x	y	z	F(x,y,z)	G(x,y,z)
x_o	y_o	z_o	$F(x_o,y_o,z_o)$	$F(x_o,y_o,z_o)$
x_o+h	y_o+k_1	z_o+l_1	$F(x_o\ h, y_o\ k_1, z_o\ l_1)$	$G(x_o\ h, y_o\ k_1\ z_o\ l_1)$
x_o+h	y_o+k_2	z_o+l_2	.....	.....
x_o+2h	y_o+2k_3	z_o+2l_3	.....	.....
x_o+2h	y_o+2k	z_o+2l		

k_i	l_i	k	
k_1	l_1	$\Sigma = k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4$	$\Sigma l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4$
k_2	l_2		
k_3	l_3		
k_4	l_4		

Con esto damos por terminado el capítulo de resolución de ecuaciones diferenciales por métodos numéricos.

RESOLUCION GRAFICA

DE ECUACIONES DIFERENCIALES

Trataremos en este capítulo un método gráfico de obtener las soluciones de las ecuaciones diferenciales.

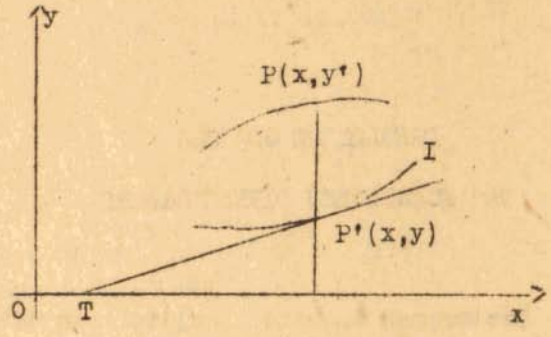
Sin embargo, antes de pasar este tema trataremos la diferenciación e integración gráfica, debido a la similitud y relación que tienen con el tema de este capítulo.

Diferenciación gráfica:

Si tenemos una curva $y = f(x)$, podemos construir gráficamente la curva $y' = \frac{dy}{dx}$. La primera se llama curva integral (la designaremos por I) y la segunda curva derivada (que designaremos por Δ).

Para construir esta última establecemos que la ordenada de la curva en un punto cualquiera $P(x,y')$ debe ser

igual a la tangente del ángulo de inclinación de la curva integral o sea la tangente del ángulo que forma la tangente a la curva, P'I en el punto correspondiente P' (x,y).



Para construir prácticamente la curva derivada, se procede del siguiente modo: Dividimos el intervalo de x_o a x_n en partes y trazamos las ordenadas y_o, y_1, y_2..... yn.

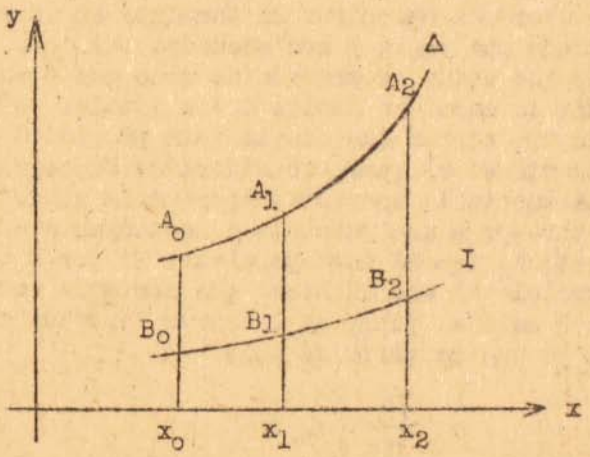
Luego trazamos las tangentes en B_o, B_1, B_2..... B_n y medimos las tangentes de sus ángulos de inclinación (coeficiente angular de las tangentes). En seguida en x_o, x_1,... x_n medimos ordenadas $x_o\ A_o = y'_o$; $x_1\ A_1 = y'_1$; ..... $x_n\ A_n = y'_n$ en donde los y' son proporcionales a los correspondientes coeficientes angulares. Por último trazamos una curva por los puntos A_o, A_1, A_2... A_n. Esta curva será aproximadamente la curva derivada.

Como se comprende la dificultad en construir la curva derivada consiste en el trazado de la tangente a la

curva integral, ya que la tangente no está bien definida por un punto de la curva.

Veremos la tabla siguiente que da la presión p en libras por pulgada cuadrada de vapor saturado a una temperatura θ medida en grados Fahrenheit. Se pide encontrar la curva de variación de la presión con la temperatura, o sea $\frac{dp}{d\theta}$

p	θ	$\frac{d\theta}{dp}$	$\frac{dp}{d\theta}$
70	302,7		
75	307,4	0,91	1,10
80	311,8	0,85	1,16
85	316,0	0,82	1,22
90	320,0	0,79	1,27



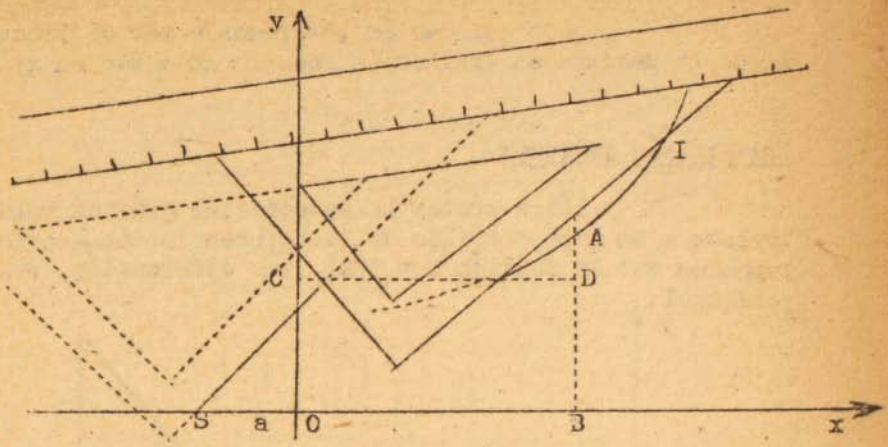
p	θ	$\frac{d\theta}{dp}$	$\frac{dp}{d\theta}$
95	323,9	0,70	1,32
100	327,6	0,72	1,39
105	331,1	0,69	1,45
110	334,5	0,67	1,49
115	337,8		

Los valores de la tercera columna los hemos obtenido con ayuda de las formulas deducidas en el párrafo de derivación numérica. Con los valores de la cuarta columna podemos dibujar la curva pedida.

Sin embargo, también podemos dibujar la curva derivada por un procedimiento puramente gráfico. Veremos como proceder para ello.

Sea una curva integral I, cuya curva derivada queremos obtener. Marquemos un punto fijo S(-a,0). Supongamos que queremos encontrar la tangente en un punto A, de I. Colocando una regla y una escuadra tal como se indica en la figura que sigue se procede de modo que a ambos lados del punto, la escuadra limite arcos iguales de la curva. Sabemos que una cuerda que cumple esta propiedad es paralela a la tangente en el punto considerado. En seguida deslizando paralelamente la escuadra, apoyándola sobre la regla hacemos pasar por S una paralela a la tangente a la curva I en el punto A. Sea SC esta paralela. Si por C trazamos una recta paralela al eje OX hasta que corte la vertical A B, el punto D será el punto de la curva derivada correspondiente a A, ya que se verifica que:

$$\frac{D\,O}{a} = tg\ \alpha$$



siendo tg α el coeficiente angular de la tangente en A.

O sea;

$$D\,B = C\,O = a\,tg\,\alpha$$

Si elegimos a = 1, por ejemplo, se tendrá;

$$D\,B = tg\,\alpha$$

Repitiendo esto para una serie de puntos se obtiene la figura que sigue en que los puntos de la curva integral I se han marcado con el símbolo ⊙ y los de la curva derivada con x (Ver fig. en la pág. siguiente).

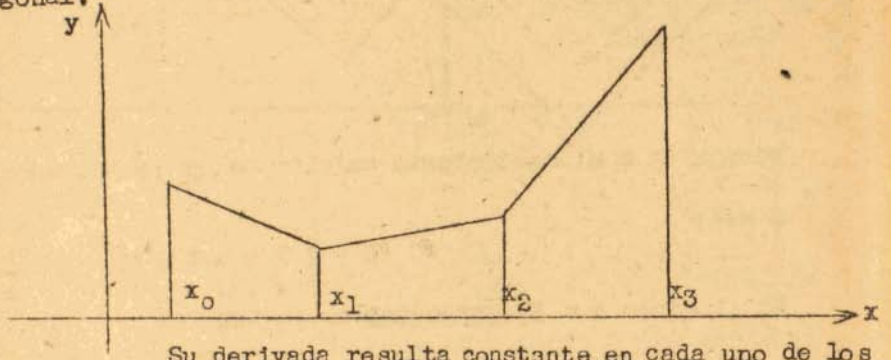
Uniendo por una curva los puntos A_0, A_1, A_2... etc., se obtiene la curva derivada.

Diremos ahora algo sobre la elección de a. Si la curva propuesta es casi horizontal los valores de $\frac{dy}{dx}$ serán pequeños en valor absoluto, y por lo tanto conviene la elección de a grande. En esta curva muy accidentada en cambio, elegiremos a pequeño, para que la curva derivada quepa en el papel.

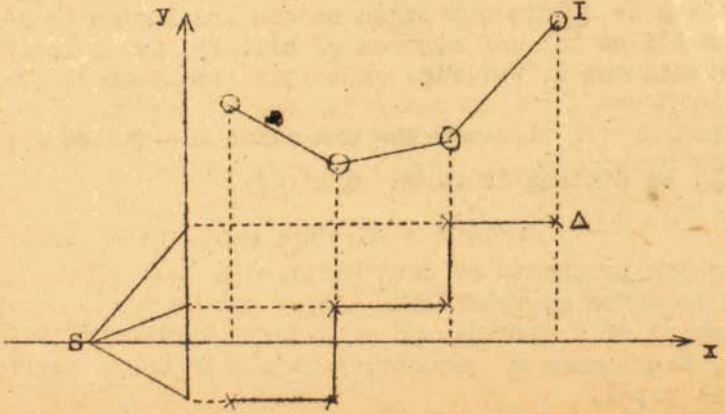
A continuación pasaremos a ver el proceso inverso de la derivación gráfica, o sea, la integración gráfica.

Integración gráfica:

Para tratar la integración gráfica volvamos primero a un caso sencillo de la diferenciación gráfica. Supongamos que la función $y = p(x)$ por diferenciar, sea una poligonal.

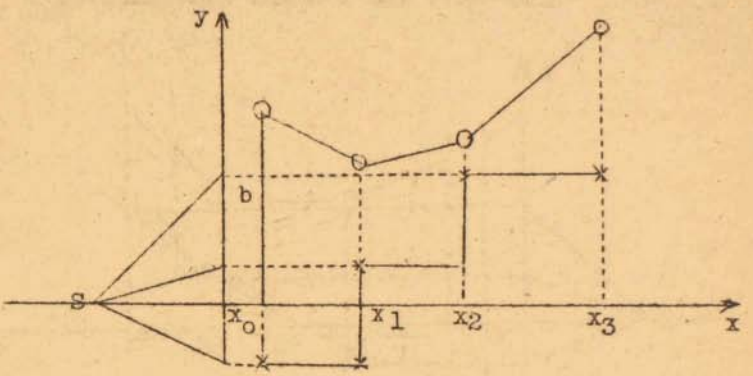


Su derivada resulta constante en cada uno de los intervalos x_n, x_{n+1}. Procedimiento como se indicó en el párrafo precedente, se obtiene la curva de la figura que sigue:



La derivada resulta una función "escalonada" E(x).

Ahora bien, la integración de una función escalonada es inmediata invirtiendo el procedimiento y dando a la función integral el valor $\underline{b}$ para $x = x_0$ (fijación de la constante de integración).



Veremos ahora como integrar una función cualquiera f(x).

Para eso;

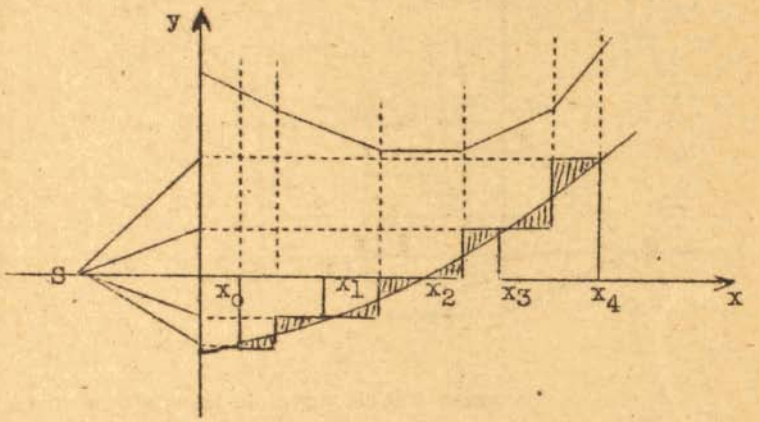
1) Se reemplazará f(x) por una función escalonada E(x), según principios que a continuación se expondrán.
2) Se integrará esta función con resultado p(x).
3) Se reemplazará p(x) por la integral definitiva F(x) según indicaciones que luego daremos.

Veamos el reemplazo de f(x) por E(x). Démonos abscisas x_0, x_1, x_2,.... Tracemos las horizontales por (x_0, y_0),

(x_1, y_1) o interceptémoslas por una vertical cuya posición sea tal que las áreas achuradas sean iguales. Los dos trazos horizontales así marcados dan la función escalonada $E(x)$ para $x_o \leqslant x \leqslant x_1$.

Y procediendo de igual manera con los otros puntos transformamos $f(x)$ en la función $E(x)$.

Se observa que tenemos exactamente.



$$\int_{x_o}^{x_1} f(x)\,dx = \int_{x_o}^{x_1} E(x)\,dx$$

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx = \int_{x_1}^{x_2} E(x)\,dx$$

.....

y etc...

Con otras palabras:

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = F(x)$$

y

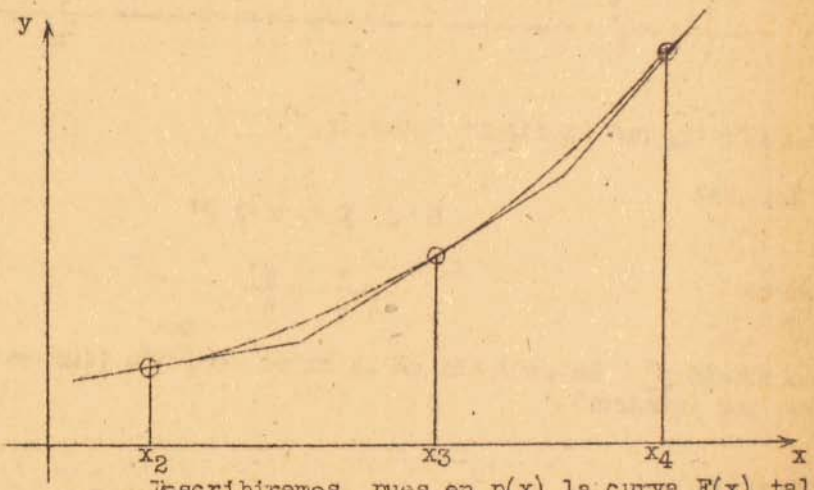
$$\int_{x_0}^{x} E(x)\,dx = p(x)$$

coinciden exactamente para $x = x_0, x_1, x_2, \ldots$ Por lo demás para estas abscisas se cortan $y = f(x)$ con $y = E(x)$ o sea;

$$F'(x) = f(x) = E(x) = p'(x)$$

para $x = x_0, x_1, x_2, \ldots$

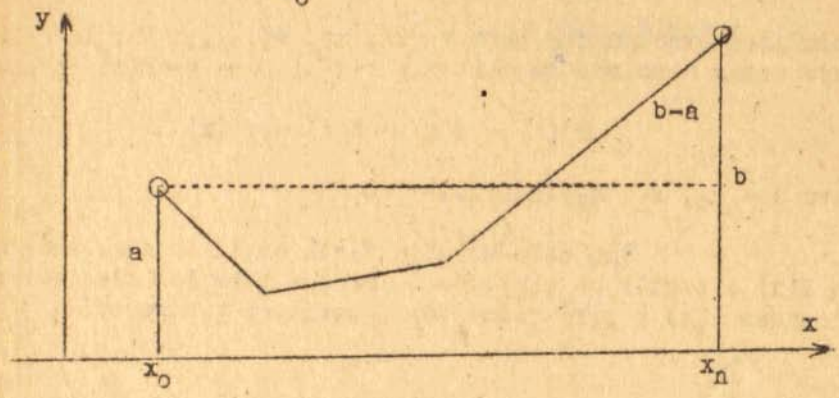
Con esto se hace fácil explicar como se obtiene F(x) a partir de p(x). Se tiene que para las abscisas mencionadas F(x) y p(x) coinciden en posición y dirección.



Inscribiremos, pues en p(x) la curva F(x) tal que pase por los puntos de abscisas $x_0, x_1, \ldots$ y que en ellos sea tangente a la poligonal. (Véase la figura).

Este último paso (reemplazo de la poligonal por la curva) está demás cuando no se quiere obtener la curva integrada si no que la integral definida entre x_o y x_n (figura que sigue) ya que:

$$\int_{x_o}^{x_n} f(x)\, dx = b - a$$



En efecto, sea la figura anterior.

Tenemos:

$$S\ O\ K \sim A'Q\ P'$$

luego:

$$\frac{y}{A'Q} = \frac{y'}{a}$$

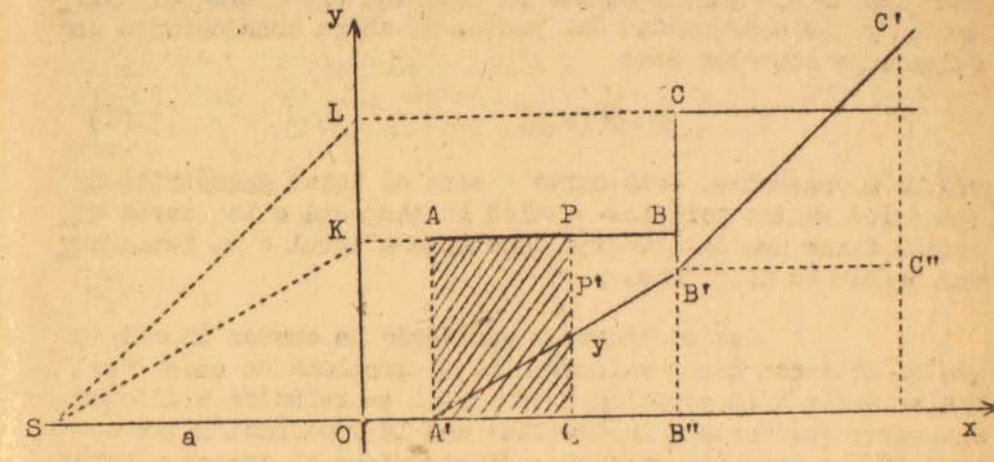
llamando y' la ordenada de la curva derivada (que es la curva por integrar).

o sea:

$$y = \frac{1}{a}\,(y'\ A'\ Q) = \frac{1}{a}\ \text{área}\ A'A\ P\ Q$$

si a = 1 y = área A'A P Q

o sea la ordenada de la curva integral es el área encerrada por la curva derivada desde el punto inicial hasta el punto de abscisa x, correspondiente a y .



Igual demostración puede hacerse para el $\Delta B'C'C''$ que está corrido hacia arriba en una cantidad

$$B'B'' = \text{área } A'P\,B''A''.$$

con lo cual queda demostrada esta propiedad.

Pasaremos a ver ahora un método gráfico de resolución de ecuaciones diferenciales.

Integración gráfica de ecuaciones diferenciales:

En este párrafo sólo trataremos el método de resolución de ecuaciones diferenciales de primer orden, basado en la obtención de las curvas isoclinas.

Sea dada la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = F(x,y) \qquad (1)$$

Llamaremos curva integral una curva tal que en cada uno de sus puntos exista la relación (1) entre su inclinación y las coordenadas del punto. Si ahora consideramos una curva cuya ecuación sea:

$$m = F(x,y) \qquad (2)$$

siendo m constante, esta curva será el lugar geométrico de todos los puntos para los cuales la tangente a la curva solución tiene una inclinación constante e igual a m. Estas curvas se llaman isoclinas.

Así si trazamos una serie de curvas isoclinas que se obtienen dando valores a m, el problema de encontrar una solución a la ecuación diferencial se reducirá a dibujar una curva que corte a la isoclina con la inclinación que corresponde a esta última curva. Ilustraremos el procedimiento:

Como: $m = tg\,\varphi$

siendo φ el ángulo que hace la solución con la horizontal, conviene que las variaciones de φ cuando pasamos de un valor de m al siguiente no sean muy desiguales.

Si nos proponemos, por ejemplo, trabajar con ocho isoclinas, haremos variar φ de

$$\frac{180°}{8} = 22°,5$$

pues bien: $tg\ 22°,5 = 0,41$

$tg\ 45° = 1,00$

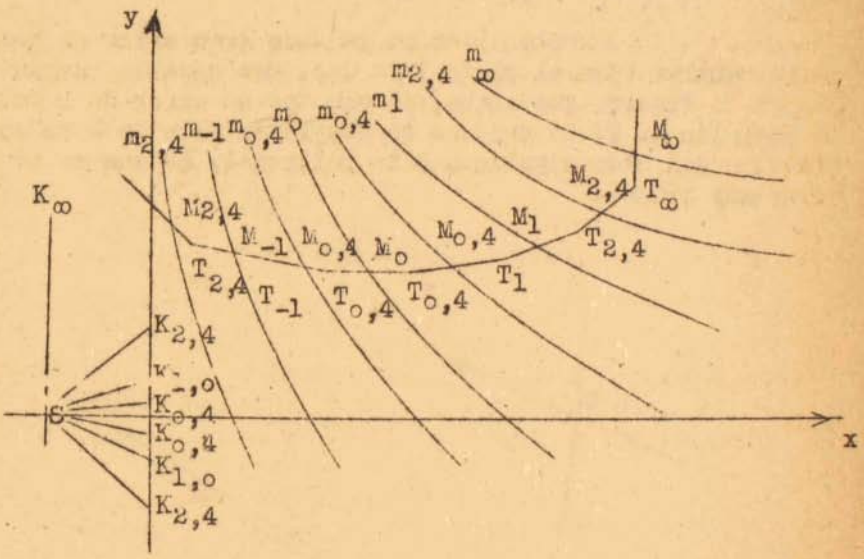
$tg\ 67°5 = 2,41$

o sea, tememos:

$$m = 0; \pm 0,4; \pm 1,0; \ 2,4; \infty$$

Tracemos esas isoclinas y supongamos que queremos que la curva integral pase por el punto A (x_o, y_o) de una de las isoclinas (por ejemplo la correspondiente a $m = -0,4$).

Sabemos que las inclinaciones de las isoclinas están dadas por el gráfico de la izquierda, tomando como distancia a = 1 unidad. (Ver figura que sigue).



Luego por A trazamos una paralela a $S K_{-0,4}$ de modo que el punto T_{-1} quede a igual distancia de m_{-1} y $m_{-0,4}$ y que $T_{-0,4}$ quede a igual distancia de $m_{-0,4}$ y m_0.

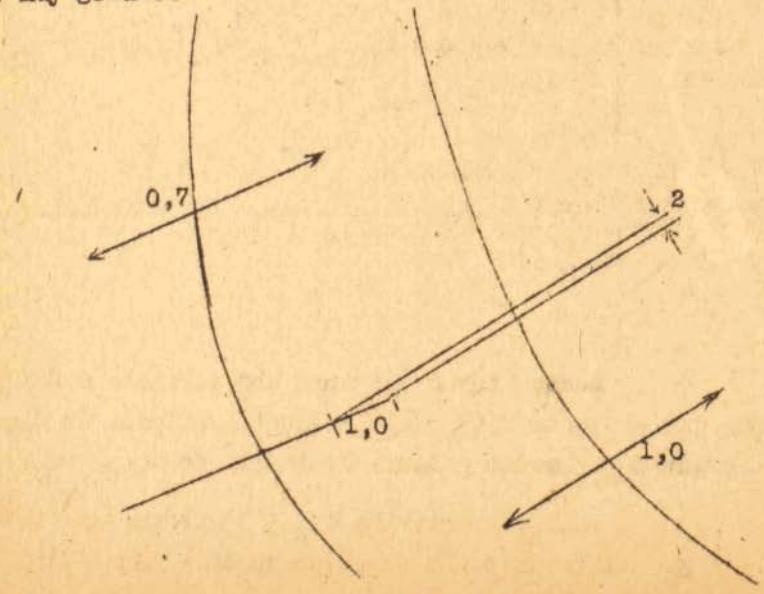
Luego, a partir de $T_{-0,4}$ trazamos una paralela a $S K_0$, hasta un punto $T_{0,4}$ que quede a igual distancia

de m_0 y $m_{0,4}$. Esta paralela corta a m_0 en M_0. Procediendo de igual modo para el resto de las isoclinas obtenemos una poligonal.

Inscribiendo una curva a la poligonal de modo que pase por los puntos M y sea tangente en ellos a la poligonal, se obtiene una curva solución de la ecuación diferencial.

La aproximación para encontrar M_0, M_1, M_2, etc. se puede realizar haciendo deslizar una escuadra paralelamente a la dirección S K de modo de poder obtener la posición deseada para los puntos T_0, T_1, T_2, ...

Por otro lado no produce gran error el hecho de no centrar bien el punto T ya que, por ejemplo, según vemos en la figura que sigue, al cometer un error de 1 cm. en la posición de T, se produce un desplazamiento de 2 mm en la posición del lado siguiente de la poligonal, lo que no es un error muy grande.



Veremos algunos ejemplos para aclarar el método:

1) Sea, por ejemplo:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

Las isoclinas tienen por ecuación:

$$-\frac{x}{y} = m$$

o sea: $y = -\frac{1}{m}x$ haz de rectas que pasan por el origen.

Démosle valores a m:

m = 0 ; 0,25 ; 0,5 ; 1,0 ; 2,0 ; 4,0 ; ∞ ; -4,0 ; -2,0 ;

-1,0 ; -0,5 ; -0,25,

para obtener ángulos aproximadamente iguales entre las direcciones.

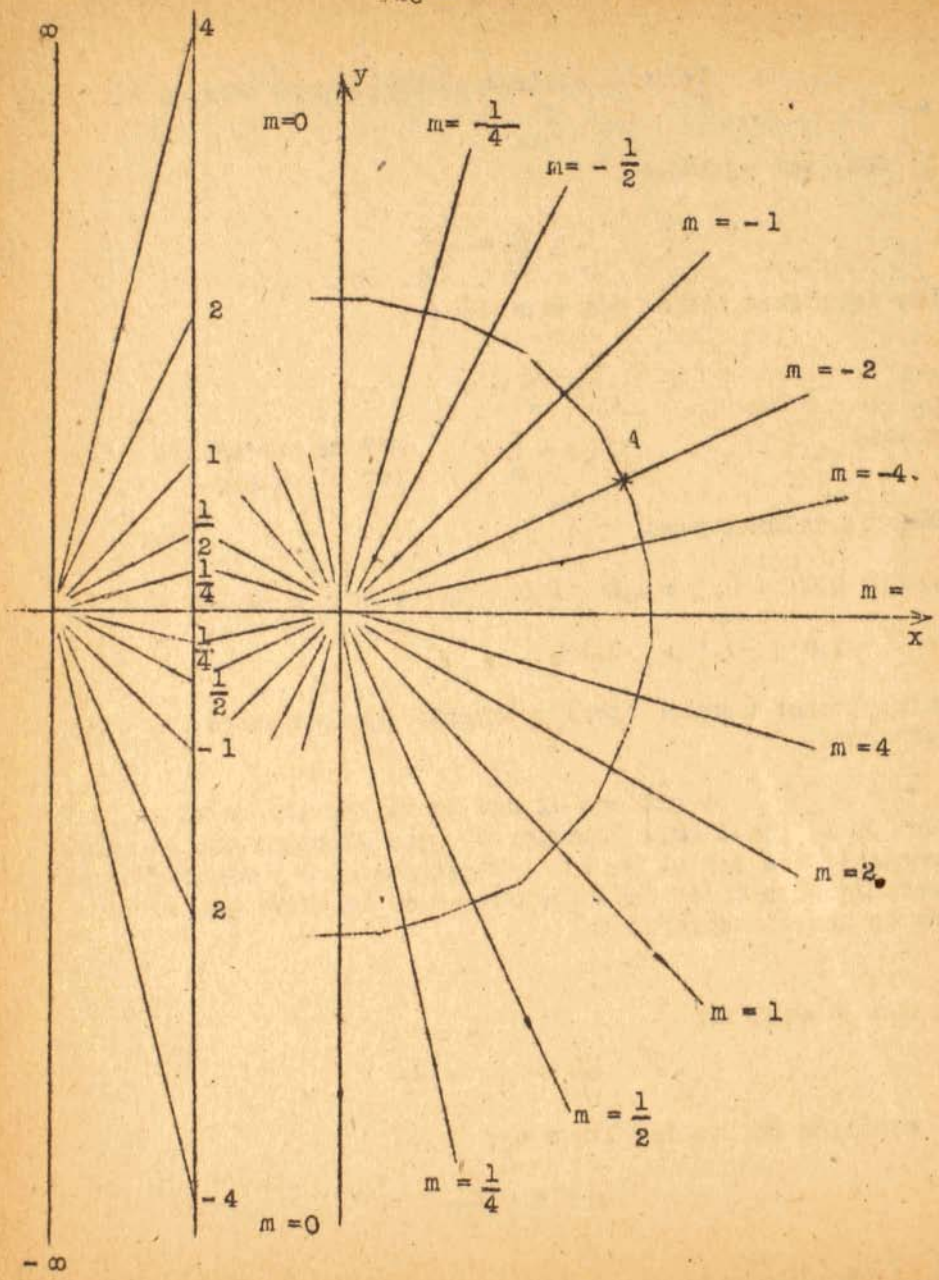
Se obtiene el haz de rectas que se vé en la figura de la pág.. 120. Supongamos que queremos que la curva integral pase por el punto A. Partiendo de A y siguiendo el procedimiento antes indicado obtenemos la curva que se vé que es una circunferencia.

2) Sea la ecuación:

$$\frac{dy}{dx} = x + \frac{y^2}{x}$$

La ecuación de las isoclinas es:

$$m = x + \frac{y^2}{x}$$

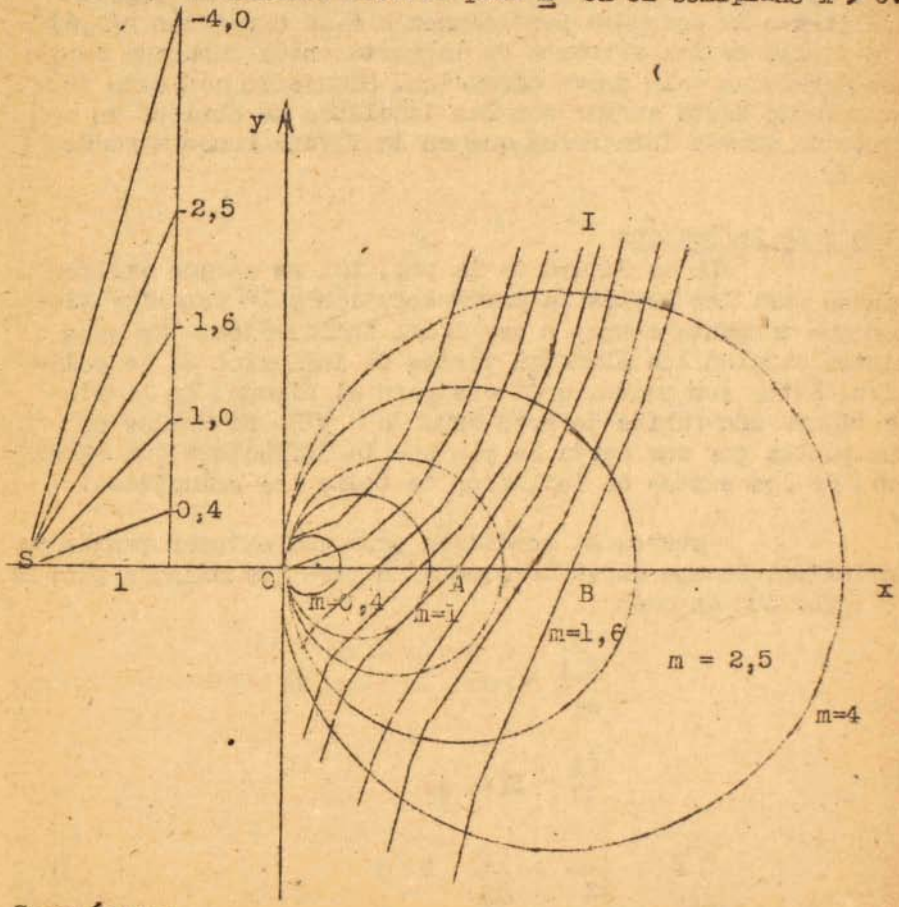

y
x
m=0
m= 1/4
m= - 1/2
m = -1
m = -2
m = -4
m =
m =4
m =2
m = 1
m = 1/2
m = 1/4
m =0
4
2
1
1/2
1/4
1/4
1/2
- 1
2
- 4
∞
- ∞

o sea:

$$x^2 + y^2 - m\,x = 0$$

que es la ecuación de circunferencias con centro $(\frac{m}{2}, 0)$ que pasan por el origen.

Tomamos valores para m en el semiplano $x > 0$.



Sean éstos:

m =0,4 ; 1,0 ; 1,6 ; 2,5; 4,0

Supongamos que ahora queremos construir simultáneamente un gran número de soluciones de la ecuación diferencial. Para eso, deslizamos una escuadra paralelamente a la dirección S_1, por ejemplo, y en la isoclina correspondiente a m = 1 trazamos una serie de rectas paralelas separadas entre sí por una distancia cualquiera. En seguida deslizamos la escuadra paralelamente a la dirección S(1,6) y a partir de los extremos de la recta antes dibujada copiamos paralelas a la nueva dirección. Siguiendo con este procedimiento hasta acabar con las isoclinas se obtiene un conjunto de curvas integrales que en la figura hemos marcado con I.

Puntos de inflexión:

De la Figura de la pág. 121 se vé que existen puntos para los cuales la curva solución y la isoclina tienen una tangente común, o sea igual inclinación. En esos puntos existen los llamados puntos de inflexión de la solución. Estos son puntos críticos para el dibujo. En la misma figura son puntos de esta especie A y B. Si unimos estos puntos por una curva se obtiene la inflectora que es el L.G. de los puntos de inflexión de todas las soluciones.

Veremos la condición para que existan puntos de inflexión. En una curva la condición para que existan puntos de inflexión es que:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

Si

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot F = 0 \qquad (3)$$

y derivando $m = F(x,y)$ para obtener la dirección de la tangente a la isoclina se tiene;

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} m = 0 \qquad (4)$$

Luego comparando (3) y (4) se vé que la condición para que haya inflexión es;

$$F = m \qquad (5)$$

Veamos un ejemplo. Sea la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{e}$$

Se obtiene fácilmente la ecuación de la inflectora;

$$4x + y(x^2 + y^2) = 0$$

para construirla según esta expresión es recomendable una forma paramétrica;

$$\frac{x}{y} = -u$$

nos dá

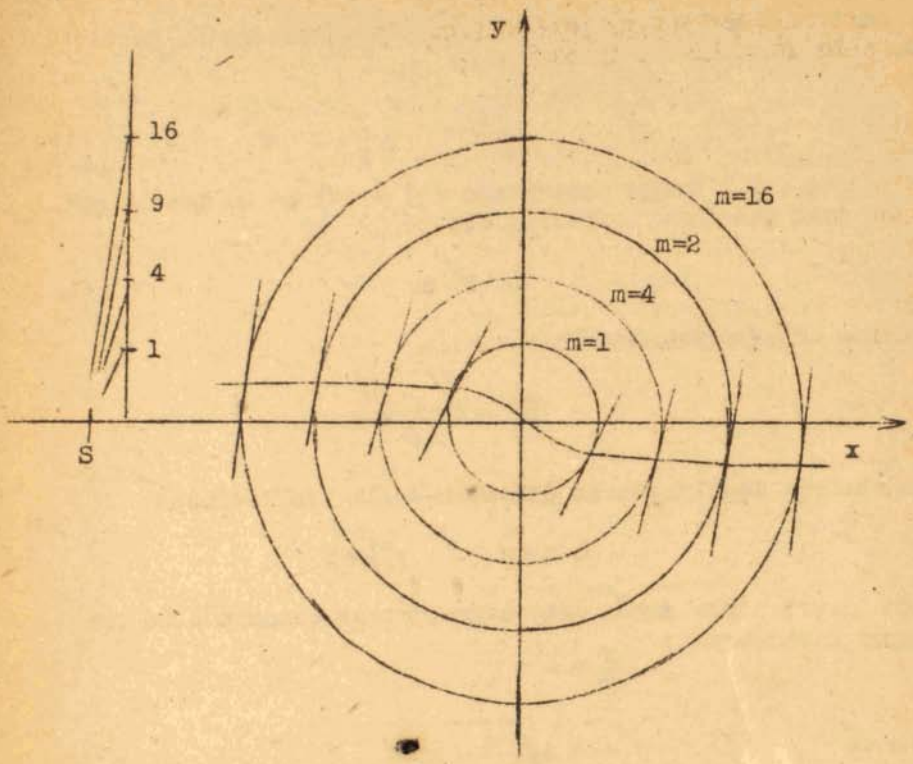
$$y = \pm 2\sqrt{\frac{u}{1+u^2}}$$
$$x = -uy$$

Pero es preferible construir la inflectora punto por punto. En cada isoclina.

$$x^2 + y^2 = 4m$$

se marcarán los dos puntos en que la tangente tiene inclinación . Unidos estos puntos se encontrará la inflectora.

Si se observa que en ellos rige $m = \frac{-y}{x}$ se



vuelve a llegar fácilmente a la representación paramétrica anterior.

Veamos otro ejemplo. Sea la ecuación:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y+x+1}{y-x}$$

para encontrar las isoclinas, tenemos:

$$m(y - x) = y+x+1$$ (haz de isoclinas)

En efecto, esta ecuación se cumple cuando

$$y - x = 0 \qquad y + x + 1 = 0$$

lo que ocurre en el punto de intersección de esas dos rectas, a saber $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.

Estas dos rectas corresponden a los valores particulares de m:

$$m = 0 \qquad y = -x - 1$$

$$m = \infty \qquad y = x$$

El haz se puede escribir:

$$\frac{y + \frac{1}{2}}{x + \frac{1}{2}} = \frac{m + 1}{m - 1}$$

De esta última podemos obtener la condición para la curva inflectora. Sabemos que el coeficiente angular de las isoclinas debe ser igual a la inclinación de la curva, o sea:

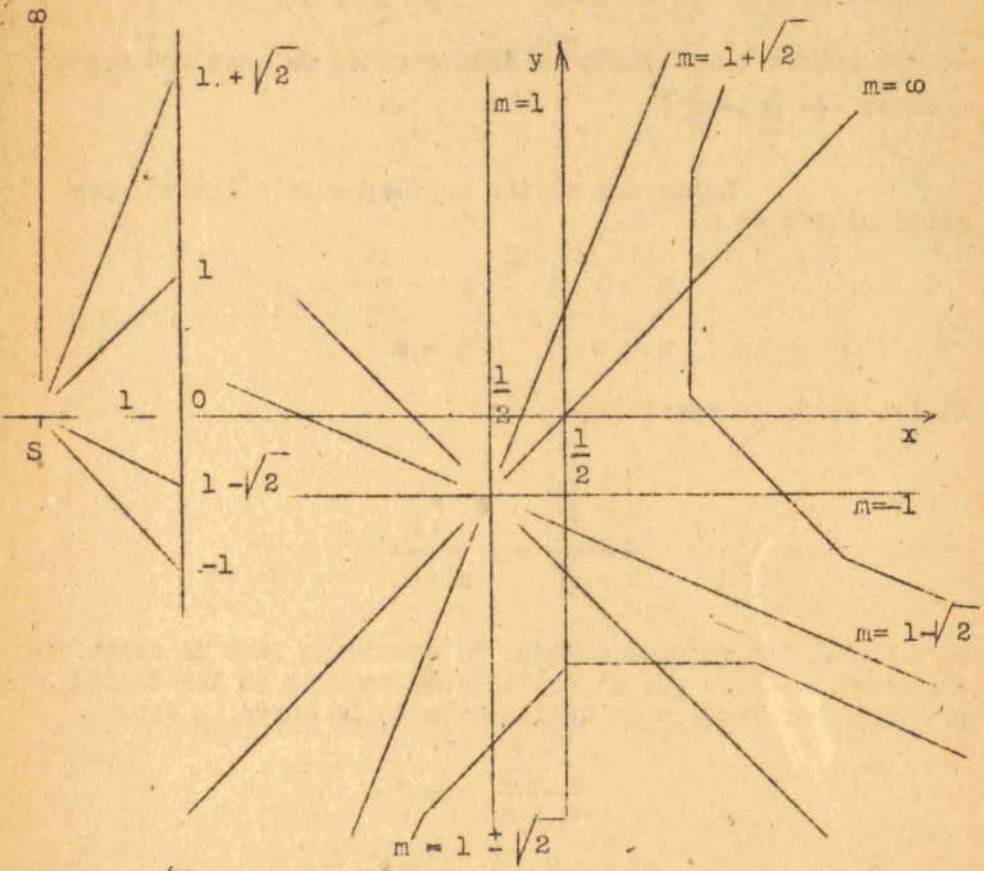
$$\frac{m + 1}{m - 1} = m$$

$$m^2 - 2m - 1 = 0$$

de donde: (Ver figura en la pág. siguiente)

$$m = 1 \pm \sqrt{2}$$

Como una recta tiene la misma inclinación en todos sus puntos resulta que estas dos "rectas isoclinas"



$m = 1 \pm \sqrt{2}$ están constituídas enteramente de puntos de inflexión o sea que son soluciones de la ecuación diferencial.

Dibujemos más isoclinas, dándole a m los valores:

$$m = 0 \; ; \; 1 \; ; \; 1+\sqrt{2} \; ; \; -1 \; ; \; 1-\sqrt{2}.$$

Tenemos el haz de isoclinas de la figura anterior. Luego trazamos las soluciones de la ecuación diferencial.

Como se vé son hipérbolas asintéticas a la inflectora. Como se tomaron pocos valores de m, la curva sale muy quebrada.

Veamos otro ejemplo. Sea la ecuación:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - x\frac{dy}{dx} + y - 1 = 0$$

Para encontrar la ecuación de las isoclinas hacemos:

$$\frac{dy}{dx} = m$$

y se tiene: $$m^3 - m x + y - 1 = 0$$

o sea: $$y = m x + 1 - m^3$$

Luego las isoclinas tienen la misma inclinación que la curva, o sea a la vez son inflectoras y soluciones de la ecuación diferencial.

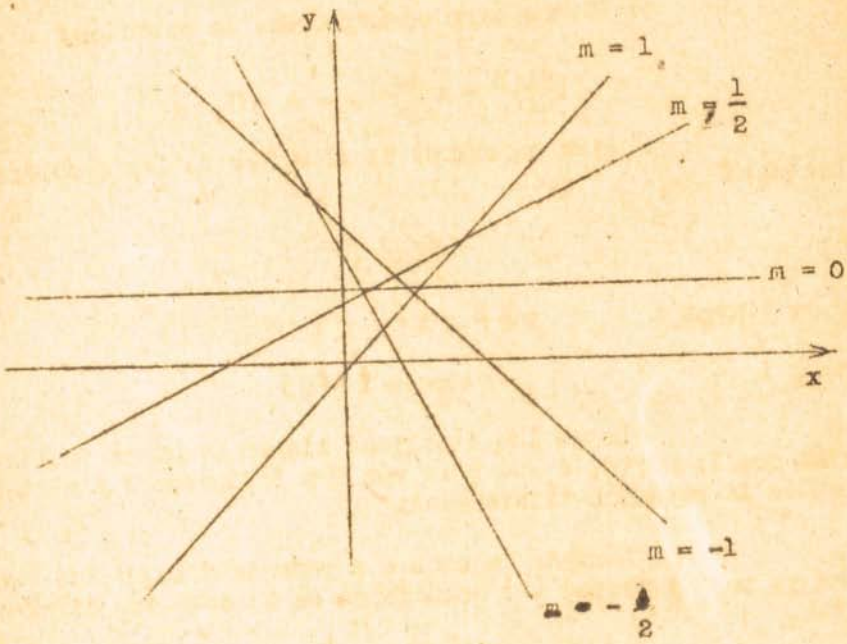
Dándole valores a m podemos dibujar las isoclinas y, por lo tanto, las soluciones de la ecuación diferencial.

Las rectas de la figura siguiente se han obtenido dando a m los valores (Ver fig. en la pag. siguiente)

$$m = 0, 1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$$

Es interesante observar que fuera de las rectas mencionadas, es solución su envolvente:

$$27(y - 1)^2 = 4 x^3$$


y
x
m = 1
m = 1/2
m = 0
m = -1
m = -1/2

RESOLUCION DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES CON COEFICIENTES CONSTANTES

Sea la ecuación:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p\frac{dy}{dx} + q\,y = R(x) \qquad (1)$$

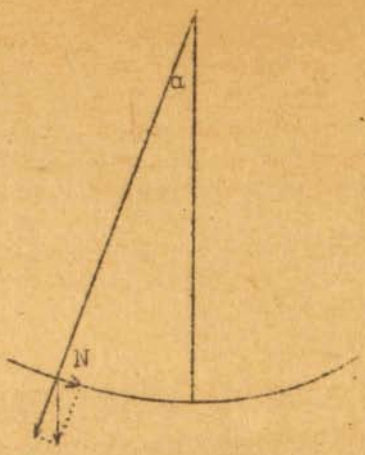
en la cual los coeficientes p y q son independientes de x, y el segundo miembro es función de x.

Este caso se presenta en numerosos problemas de la Física. Por ejemplo, la ecuación de un elemento que vibra es:

$$m\frac{d^2S}{dt^2} = a^2 s - b^2\frac{ds}{dt} + e \operatorname{sen} \omega t$$

Si se trata, por ejemplo, del péndulo, sólo actúa la fuerza tangencial

$$N = m\,g \operatorname{sen} \alpha$$



y como $\operatorname{sen} \alpha \simeq \alpha = \frac{s}{l}$

se vé que la fuerza es proporcional a s

$$N = \frac{m g}{l} s$$

Si el péndulo oscila en un medio resistente, la fuerza resistente es contraria al movimiento y proporcional a la velocidad $\frac{ds}{dt}$.

Si ahora se supone que actúa una fuerza externa cualquiera se vé que este movimiento estará representado por la ecuación diferencial.

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = - a^2 s - b^2 \frac{ds}{dt} + c \operatorname{sen} w t$$

en la cual hemos supuesto una fuerza externa periódica.

Este tipo de ecuaciones también se encuentra

en Electrotecnia. Sabemos que la intensidad es la derivada de la cantidad de electricidad respecto al tiempo. El potencial también es una derivada. Por último, la fuerza electromotriz de la corriente alterna es una fuerza externa oscilante, Luego la ecuación que representará un fenómeno en que participen todos estos factores será del tipo visto más arriba.

Para resolver estas ecuaciones usamos los operadores.

Operador D;

En vez de poner $\frac{d}{dx}$ colocamos D y procedemos como si fuera casi un factor. D se llama el operador diferencial. Luego;

$$D = \frac{d}{dx} \qquad (2)$$

En esta forma podemos escribir (i) como:

$$D^2 y + p D y + q y = z$$

siendo z conocido e y desconocido.

El operador D se comporta casi algebraicamente o sea:

$$D(u + v + w) = D u + D v + D w$$

o sea es distributivo.

$$D(c u) = c(D u)$$

luego es conmutativo siempre que C sea constante.

Luego podemos poner:

$$(D^2 + p\,D + q)y = z$$

Veamos ahora el operador $(D - a)$ o sea una función de D de primer grado.

Operador $(D - a)$. Sea:

$$\frac{dy}{dx} - a\,y = z$$

o sea: $$(D - a)\,y = z$$

Sabemos que:

$c = C^{te}$
$a = C^{te}$.

$$(D - a)\,c\,y = c(D - a)\,y$$

y $$(D - a)(u + v) = (D - a)\,u + (D - a)\,v$$

Por ejemplo:

$$(D - 1)\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}\right) = \qquad a = 1$$

$$= -1 + (1 - x) + \frac{1}{2}(2 - x)\,x - \frac{1}{6}(3 - x)x^2$$

$$= -\frac{x^3}{6}$$

Veamos en un cuadro los valores de z para valores particulares de y:

y	(D - a) y = z
1	- a
x	1 - a x
x^2	(2 - a x) x
x^n	(n - a x) x^{n-1}
° $e^{\omega x}$	(ω - a) $e^{\omega x}$
° $e^{\omega ix}$	(ωi - a) $e^{\omega ix}$
° e^{ax}	0
° $x^n e^{ax}$	$nx^{n-1}\ e^{ax}$
cos ω x	$-\omega$ sen ω x - a cos ω x
sen ω x	ω cos ω x - a sen ω x

O sea que en los casos en que el operador (D- a) opera sobre $e^{\omega x}$, la solución se obtiene reemplazando D por ω

Para comprobar el antepenúltimo resultado, tenemos:

$$(D - a)\ x^n\ e^{ax} = n\ x^{n-1}\ e^{ax} + a\ x^n\ e^{ax} - a\ x^n\ e^{ax}$$

$$= n\ x^{n-1}\ e^{ax}$$

Si queremos concentrar en unas pocas, las fórmulas del cuadro, estas serían las marcadas con°.

Si queremos aplicar el operador (D - a) sobre el seno y el coseno, podemos valernos de $e^{\omega ix}$, procediendo del siguiente modo:

Sabemos que: $e^{\omega ix} = \cos \omega x + i \operatorname{sen} \omega x$

$(D - a)\, e^{\omega i x} = (\omega i - a)\, e^{\omega i x} = (\omega i - a)(\cos \omega x + i \operatorname{sen} \omega x)$

la parte real de este desarrollo corresponderá al coseno y la imaginaria al seno.

$(D - a)\, e^{\omega i x} = -a \cos \omega x - \omega \operatorname{sen} \omega x + i(\omega \cos \omega x - a \operatorname{sen} \omega x)$

de donde;

$$(D - a) \cos \omega x = -a \cos \omega x - \omega \operatorname{sen} \omega x$$

y

$$(D - a) \operatorname{sen} \omega x = \omega \cos \omega x - a \operatorname{sen} \omega x$$

Luego estas dos fórmulas estarían comprendidas en la de e^{ix}.

Hasta ahora hemos calculado z siendo dado y, o sea;

$$z = (D - a)\, y$$

Calculemos ahora y, siendo dado z. O sea el procedimiento inverso que designaremos simbólicamente con el signo -1 en el exponente;

$$y = (D - a)^{-1}\, z$$

y procedamos como en el caso anterior a hacer una tabla de los valores de y para valores particulares de z. Veamos, por ejemplo, para $z = 1$. En la primera tabla no hay ningún valor 1 en la columna de las z, pero si multiplicamos el primer valor por $-\frac{1}{a}$ obtenemos;

$$(D - a)\left(-\frac{1}{a}\right) = 1$$

o sea;

$$-\frac{1}{a}(D - a)^{-1}\, 1$$

Supóngase ahora para $z = e^{\omega x}$. Si dividimos en la primera tabla el valor correspondiente por $(\omega - a)$ queda;

$$(D - a)\ \frac{e^{\omega x}}{\omega - a} = e^{\omega x}$$

o sea; $$\frac{e^{\omega x}}{\omega - a} = (D - a)^{-1}\ e^{\omega x}$$

Pero además vimos que para $z = 0$ (ver la tabla) se tenía $y = e^{ax}$. Luego;

$$(D - a)\ C\ e^{ax} = 0$$

$$C\ e^{ax} = (D - a)^{-1}\ 0$$

Pero en los casos anteriores se puede considerar;

$$z = z + 0$$

y entonces a todas las soluciones se les puede agregar el término $C\ e^{ax}$. Luego la tabla de funciones inversas quedaría;

z	$(D - a)^{-1}\ z = y$	
1	$-\frac{1}{a}$	$+ C\ e^{ax}$
x	$-\frac{x}{a} - \frac{1}{a^2}$	$+ C\ e^{ax}$
$e^{\omega x}$	$-\frac{e^{\omega x}}{\omega - a}$	para $\omega \neq a$
z	$(D - a)^{-1}\ z = y$	
$e^{\omega i x}$	$\frac{e^{\omega i x}}{\omega i - a}$	para $\omega \neq a$
e^{ax}	$x\ e^{ax}$	

Luego en los casos en que $(D - a)^{-1}$ opera sobre $e^{\omega x}$, también se obtiene la solución reemplazando D por ω Obsérvese el caso $\omega = 0$:

$$(D - a)^{-1}\, 1 = (D - a)^{-1}\, e^{0x} = \frac{e^{0x}}{0 - a} = -\frac{1}{a}$$

Para encontrar la segunda fórmula de esta tabla sabemos que a $\frac{x}{a}$ de la primera tabla le corresponde

z	y
$-x + \frac{1}{a}$	$-\frac{x}{a}$
$x - \frac{1}{a}$	$-\frac{x}{a}$
$\frac{1}{a}$	$-\frac{1}{a^2}$
x	$-\frac{x}{a} - \frac{1}{a^2}$

Para $y = -\frac{x}{a}$ se tiene $z = x - \frac{1}{a}$ y para $z = \frac{1}{a}$ se tiene $y = -\frac{1}{a^2}$. Luego sumando las dos últimas equivalencias se llega a la segunda fórmula del cuadro.

Para tratar e^{ax} no podemos usar directamente la tercera fórmula porque resultaría $\frac{e^{ax}}{o}$. Aplicaremos la antepenúltima fórmula con $n = 1$, resultando:

$$(D - a)^{-1}\, e^{ax} = x\, e^{ax}$$

pero también podemos poner:

$$\frac{e^{\omega x}}{\omega - a} + C\, e^{ax} = \frac{e^{\omega x} + C(\omega - a)\, e^{ax}}{\omega - a}$$

Si elegimos $C = -\frac{1}{\omega - a}$ queda:

$$\frac{e^{\omega x} - e^{ax}}{\omega - a}$$

si hacemos $\omega \longrightarrow a$, la fracción queda de la forma $0 : 0$. Luego podemos aplicar L'Hopital. Derivando respecto a ω se tiene:

$$\frac{x\, e^{\omega x}}{1} \longrightarrow \frac{x\, e^{ax}}{+1} = x\, e^{ax}$$

que es la cuarta fórmula del segundo cuadro.

El operador $(D - a)$ lo ocupamos para resolver ecuaciones diferenciales del tipo:

$$(D - a)\, y = z \qquad \text{siendo } z = f(x)$$

o sea:

$$\frac{dy}{dx} - a\, y = z$$

Para resolver esta ecuación por métodos corrientes hacemos:

$$y = u\, v$$

$$\frac{dy}{dx} = u\, \frac{dv}{dx} + v\, \frac{du}{dx}$$

y reemplazando:

$$u\frac{dv}{dx} + v\left[\frac{du}{dx} - a\, u\right] = z$$

Hacemos:

$$\frac{du}{dx} - a\,u = 0$$

$$\frac{du}{u} = a\,dx$$

de donde:

$$u = e^{ax}$$

Por lo tanto la ecuación queda:

$$e^{ax}\,\frac{dv}{dx} = z \qquad dv = e^{-ax}\,z\,dx$$

y luego:

$$v = \int e^{-ax}\,z\,dx + C$$

Entonces la solución de la ecuación es:

$$y = e^{ax}\int e^{-ax}\,z\,dx + C\,e^{ax}$$

Por lo tanto tenemos la siguiente relación:

$$(D - a)^{-1}\,z = e^{ax}\int e^{-ax}\,z\,dx$$

El sumando de la solución $C\,e^{ax}$ se obtiene en cada caso observando que en el primer miembro se puede poner

$$z = z + 0$$

Demás está decir que la fórmula deducida más arriba no debe usarse sino en casos extremos en que no se puede hacer de otro modo ya que lo que se persigue con el uso del operador (D - a) es evitarse el proceso de integración corriente.

Veremos algunos ejemplos del uso del operador (D - a):

1) Sea la ecuación:

$$y' - 3y = 5e^{2x}$$

o bien: $$(D - 3)\ y = 5e^{2x}$$

$$y = (D - 3)^{-1}\ (5e^{2x} + 0)$$

según los valores del segundo cuadro:

$$y = \frac{5}{2-3} e^{2x} + C\ e^{3x}$$

luego: $$y = -5e^{2x} + C\ e^{3x}$$

2) Sea: $$y' - 3iy = e^{(1-i)x}$$

o $$(D - 3i)\ y = e^{(1-i)x}$$

de donde: $$y = (D - 3i)^{-1}\ e^{(1-i)x}$$

$$y = \frac{e^{(1-i)x}}{1-i-3i} = \frac{e^{x}\ e^{-ix}}{1 - 4i}$$

pero $$e^{-ix} = \cos x - i \operatorname{sen} x$$

y entonces:

$$y = e^{x}\ \frac{(\cos x - i \operatorname{sen} x)(1 + 4i)}{(1 - 4i)\ (1 + 4i)}$$

$$y = e^{x}\ \frac{(\cos x + 4 \operatorname{sen} x) + i\ (4 \cos x - \operatorname{sen} x)}{17}$$

Debemos agregarle a la solución el término $C\ e^{3ix}$.

Luego:

$$y = e^{x} \underbrace{\frac{(\cos x + 4 \operatorname{sen} x) + i(4 \cos x - \operatorname{sen} x)}{17}}_{(1)} + C \underbrace{e^{3ix}}_{(2)}$$

(1) se llama solución régimen y (2) transiente.

La separación en parte real e imaginaria se puede conseguir como sigue:

Hacemos el denominador:

$$1 - 4i = \sqrt{17}\ (\cos \delta - i \operatorname{sen} \delta)$$
$$= \sqrt{17}\ e^{-i\delta}$$

en que: $$\operatorname{tg} \delta = \frac{4}{1} = 4$$

Según esto:

$$y = \frac{e^{(1-i)x}}{\sqrt{17}\, e^{i\delta}} = \frac{1}{\sqrt{17}}\, e^{x}\ e^{-i(x+\delta)}$$

$$= \frac{e^{x}}{\sqrt{17}} \left[\cos(x+\delta) - i \operatorname{sen}(x+\delta)\right]$$

y la solución real sería:

$$y = \frac{e^{x}}{\sqrt{17}} \cos(x+\delta)$$

3) Sea la ecuación:

$$y' + 3y = 5 \cos 2x$$

En vez de cos 2x pondremos en el segundo miembro e^{2ix}. Al hacer esto introducimos la función seno ya que:

$$e^{2ix} = \cos 2x + i \operatorname{sen} 2x$$

pero en el resultado sólo consideraremos la parte real de éste, lo que hará desaparecer el error.

Entonces:

$$(D+3)y = 5\ e^{2ix}$$

$$y = (D+3)^{-1}\ (5\ e^{2ix} + 0)$$

$$y = \frac{5\ e^{2ix}}{2i+3} + C\ e^{-3x}$$

$$y = \frac{5(\cos 2x + i \operatorname{sen} 2x)\ (3 - 2i)}{13} + C\ e^{-3x}$$

Luego la solución de la ecuación es:

$$y = \frac{5}{13}(3 \cos 2x + 2 \operatorname{sen} 2x) + C\ e^{-3x}$$

4) Sea la ecuación:

$$y' - 3y = \operatorname{sen} 2x$$

Procediendo de igual forma que en el ejemplo anterior, pero considerando sólo la parte imaginaria, para el resultado se tiene:

$$(D - 3)y = \operatorname{sen} 2x$$

$$y = (D - 3)^{-1}\ (e^{2ix} + 0)$$

$$y = \frac{e^{2ix}}{2i - 3} + C\, e^{3x}$$

$$y = \frac{(\cos 2x + i \operatorname{sen} 2x)(3 + 2i)}{-13} + C\, e^{3x}$$

La solución régimen de la ecuación queda:

$$y = -\frac{2 \cos 2x + 3 \operatorname{sen} 2x}{13}$$

Luego por este método hemos aprendido a resolver ecuaciones lineales de coeficientes constantes y de primer orden, siempre que la función del segundo miembro figure en nuestra tabla.

Ahora pasaremos a estudiar un método para resolver ecuaciones de este mismo tipo pero de segundo orden.

Operador $D^2 - (a+b)D + a\,b$.

Sea el producto:

$$(D - a)\,(D - b)\,y$$

efectuando las operaciones tenemos:

$$(D - a)(D - b)y = (D - a)(D\,y - b\,y)$$

$$(D - a)(D - b)\,y = D^2y - D\,b\,y - a\,D\,y + a\,b\,y$$

$$= D^2y - (a + b)D\,y + a\,b\,y$$

$$(D - a)(D - b)y = \left[D^2 - (a+b)D + a\,b\right] y$$

Luego:

$$(D - a)(D - b) = D^2 - (a + b)D + a\,b$$

de igual modo:

$$(D - b)(D - a) = D^2 - (a + b)\,D + a\,b$$

de modo que:

$$(D - a)\ \ (D - b) = (D - b)\ (D - a)$$

siempre que a y b sean constantes.

Efectuemos ahora el producto:

$$\left[\frac{1}{D - a}\ \ \frac{1}{D - b}\right](D - a)(D - b) = (D - b) - (D - a) = a - b$$

si dividimos por $(a - b)$ nos queda:

$$\underbrace{(D - a)(D - b)}_{(2)}\ \underbrace{\frac{1}{a - b}\left[(D - a)^{-1} - (D - b)^{-1}\right]}_{(1)} = 1 \quad (1):$$

Si aplicamos primero el operador (1) a una función, y luego el operador (2), se vuelve a la misma función. Luego (1) y (2) son inversos. O sea:

$$\boxed{\frac{1}{a - b}\left[(D - a)^{-1} - (D - b)^{-1}\right] = \left[(D - a)\ (D - b)\right]^{-1}}$$

Supóngase ahora que tenemos la ecuación:

$$(D^2 + A\,D + B)y = (D - a)\ (D - b)\ y = z$$

siendo:

$$a = -\frac{A}{2} + \sqrt{\frac{A^2}{4} - B}$$

$$b = -\frac{A}{2} - \sqrt{\frac{A^2}{4} - B}$$

Tenemos:

$$y = (D^2 + A\,D + B)^{-1}\, z = \left[(D - a)(D - b)\right]^{-1} z$$

$$= \frac{1}{a - b}\left[(D - a)^{-1} - (D - b)^{-1}\right](z + 0)$$

$$= \frac{1}{a + b}\left[(D - a)^{-1}\, z - (D - b)^{-1}\, z\right] + C_1\, e^{ax} + C_2\, e^{bx}$$

Cuando se tiene un valor particular de z, por ejemplo

$$z = e^{\omega x}$$

$$y = (D - a)^{-1}\,(D - b)^{-1}\, e^{\omega x} + C_1\, e^{ax} + C_2\, e^{bx}$$

$$= (D - a)^{-1}\, \frac{e^{\omega x}}{\omega - b} + C_1\, e^{ax} + C_2\, e^{bx}$$

$$y = \frac{e^{\omega x}}{(\omega - a)(\omega - b)} + C_1\, e^{ax} + C_2\, e^{bx}$$

$$= \underbrace{\frac{e^{\omega x}}{\omega^2 + A\,\omega + B}}_{\text{régimen}} + \underbrace{C_1\, e^{ax} + C_2\, e^{bx}}_{\text{transiente}}$$

Luego la solución régimen de la ecuación:

$$y = (D^2 + A + B)\, e^{\omega x}$$

se obtiene reemplazando en la ecuación D por ω.

Si sólo necesitamos la solución régimen no tenemos para que resolver la ecuación de segundo grado ya que a y b sólo los necesitamos para la transiente.

Si la ecuación es de tercer orden se tendrá una ecuación de tercer grado. Si sólo nos interesa la solución régimen no habrá que calcular las raíces (lo que a veces resulta complicado) si no que bastará reemplazar D por ω en la ecuación, propiedad que puede demostrarse en la misma forma que se hizo para la ecuación de segundo orden.

Veamos ahora algunos ejemplos:

(1) Sea la ecuación:

$$y'' - 5y' + 6y = 7e^{\frac{1}{2}x}$$

$$(D^2 - 5D + 6)\, y = 7e^{\frac{1}{2}x}$$

$$y = \frac{7e^{\frac{1}{2}x}}{D^2 - 5D + 6} = \frac{7e^{\frac{1}{2}x}}{\frac{1}{4} - \frac{5}{2} + 6}$$

$$y = \frac{28}{15} e^{\frac{1}{2}x} \qquad \text{soluc. régimen}$$

Para la transiente:

$$D^2 - 5D + 6 = 0$$

$$\left.\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}\right\} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{24}{4}} = \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}$$

Luego: $a = 3$ $\qquad b = 2$

Entonces la solución completa de la ecuación es:

$$y = \frac{28}{15} e^{\frac{1}{2}x} + C_1 e^{3x} + C_2 e^{2x}$$

2) Resolvamos la ecuación:

$$y'' - 3y' + 2y = e^{ix}$$

$$(D^2 - 3D + 2)\, y = e^{ix}$$

La resolveremos empleando la fórmula (1):

$$(D - 2)(D - 1)\, y = e^{ix}$$

$$y = \left[(D - 2)(D - 1)\right]^{-1} (e^{ix} + 0)$$

$$y = \frac{1}{1}\left[(D - 2)^{-1} - (D - 1)^{-1}\right] (e^{ix} + 0)$$

Como sabemos que se reemplaza D por i, tenemos:

$$y = \frac{e^{ix}}{i - 2} - \frac{e^{ix}}{i - 1} + C_1 e^{2x} + C_2 e^{x}$$

$$y = \frac{e^{ix}}{-1 - 3i + 2} + C_1 e^{2x} + C_2 e^{x}$$

$$\frac{e^{ix}}{1 - 3i} = \frac{(\cos x + i \operatorname{sen} x)(1 + 3i)}{1 + 9}$$

$$= \frac{(\cos x - 3 \operatorname{sen} x) + i(\operatorname{sen} x + 3 \cos x)}{10}$$

Luego la solución de la ecuación es:

$$y = \frac{(\cos x - 3 \operatorname{sen} x) + i(\operatorname{sen} x + 3 \cos x)}{10} + C_1 e^{2x} + C_2 e^{x}$$

3) Sea la ecuación:

$$3y'' + 18y' + 100y = 5e^{-2x}\cos x + 7$$

En vez de poner cos x colocaremos e^{ix} y en el resultado sólo ocuparemos la parte real de él. Busquemos primero la solución régimen. La ecuación la podemos poner como:

$$(3D^2 + 18D + 100)\,y = 5e^{(-2+i)x} + 7e^{0x}$$

$$y = \frac{5e^{(-2+i)x}}{3(-2+i)^2 + 18(-2+i) + 100} + \frac{7}{100}$$

$$y = \frac{5e^{(-2+i)x}}{(73+6i)} + \frac{7}{100}$$

Ahora tenemos:

$$73 + 6i = \sqrt{73^2 + 6^2}\; e^{i\delta} = 73{,}25\; e^{i\delta}$$

en que $\delta = \text{arc tg } \frac{6}{73} = 0{,}082$

Por lo tanto:

$$y = \frac{5}{73{,}5}e^{(-2+i)x - 0{,}082i} + \frac{7}{100} = 0{,}068\, e^{-2x} e^{i(x-0{,}082)} + \frac{7}{100}$$

La solución real es:

$$y = 0{,}068\, e^{-2x}\cos(x - 0{,}082) + 0{,}070$$

Busquemos ahora la solución transiente. Para eso resolvemos:

$$3a^2 + 18a + 100 = 0$$

$$a = \frac{-9 \pm \sqrt{81 - 300}}{3} = \frac{-9 \pm \sqrt{-219}}{3}$$

$$= -3 \pm 4{,}9\, i$$

Luego la transiente es:

$$C_1 e^{(-3+4,9i)x} + C_2 \; e^{(-3-4,9\,i)x}$$

si queremos que aparezca una transiente real, elegiremos C_1 y C_2 complejos conjugados:

$$C_1 = \frac{A}{2} e^{i\delta} \qquad C_2 = \frac{A}{2} e^{-i\delta}$$

así resulta:

$$\frac{A}{2} e^{-3x} \left[e^{(4,9x+\delta)i} + e^{-(4,9x\,\delta)i} \right] = A\, e^{-3x} \cos (4,9\, x + \delta)$$

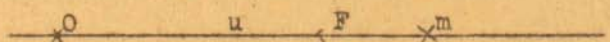
o sea la solución transiente queda real.

Resolveremos algunos problemas de Mecánica Racional usando operadores en la integración de las ecuaciones diferenciales a que ellos den origen.

1) Sea una partícula de masa m que es atraída por O con una fuerza F, proporcional a la distancia. Encontrar la ecuación del movimiento si la partícula se mueve sobre una recta fija Om.

Aplicando la ecuación de Newton tenemos:

$$m \frac{d^2u}{dt^2} = - k^2 \; u$$



o bien:

$$(m D^2 + k^2) u = 0$$

de donde;

$$(D^2 + \frac{k^2}{m})\ u = 0$$

si

$$\frac{k^2}{m} = p^2$$

la ecuación nos queda:

$$(D + pi)\ \ (D - pi)\ \ u = 0$$

Debe hacerse notar que la solución régimen es cero ya que a ella da origen la función del segundo miembro que aquí no existe. Sólo existirá solución transiente ya que ella se obtiene agregando 0 a la función del segundo miembro.

$$u = (D - pi)^{-1}\ \ (D + pi)^{-1}\ \ 0$$

Aplicando la fórmula vista anteriormente:

$$u = \frac{1}{2\,pi}\left[(D - pi)^{-1}\ 0 - (D + pi)^{-1}\ \ 0\right]$$

$$u = C_1\ \ e^{pit} + C_2\ e^{-pit}$$

y reemplazando p por su valor queda:

$$u = C_1\ \ e^{\frac{k}{\sqrt{m}}it} + C_2\ e^{\frac{-k}{\sqrt{m}}it}$$

vimos en el ejemplo anterior que la solución transiente era real y valía:

$$u = C\cos\left(\frac{k}{\sqrt{m}}t + \delta\right)$$

Para determinar el movimiento tenemos que calcular C y δ que son constantes. Para esto nos damos las condiciones iniciales del movimiento. Supóngase que para:

$$t=0 \qquad u=u_o \qquad \frac{du}{dt}=v_o$$

Entonces queda:

$$C \operatorname{sen} \delta = -\frac{v_o}{p} \qquad p = \frac{k}{\sqrt{m}}$$

$$C \cos \delta = u_o$$

elevando al cuadrado y sumando:

$$C^2 = u_o^2 + \frac{v_o^2}{p^2}$$

$$C = \sqrt{u_o^2 + \frac{v_o^2}{p^2}}$$

dividiendo miembro a miembro cada ecuación se tiene:

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{-v_o}{p\, u_o}$$

o sea:

$$\delta = -\operatorname{arc\ tg} \frac{+v_o}{p\, u_o}$$

Luego la ecuación final del movimiento sería:

$$u = \sqrt{u_o^2 + \frac{m\, v_o^2}{k^2}} \left[\cos \frac{k}{\sqrt{m}} t - \operatorname{arc\ tg} \frac{+m\, v_o}{k\, u_o} \right]$$

En el caso general si tenemos la ecuación diferencial:

$$(D^2 + \omega^2)\ u = 0$$

su solución es: $u = R \cos(\omega t - \delta)$

o bien: $u = C_1 e^{\omega i t} + C_2 e^{-\omega i t}$

siendo R la amplitud de la oscilación, ω la frecuencia y el desface.

2) Consideremos el mismo problema que en el caso anterior agregándose una fuerza F1 amortiguadora del movimiento.

$$F_1 = -2p^2 \frac{du}{dt}$$

La ecuación diferencial del movimiento es ahora:

$$m \frac{d^2u}{dt^2} = -k^2 u - 2p^2 \frac{du}{dt}$$
$$(1) \qquad (2)$$

(1) Se llama fuerza elástica y (2) amortiguante. La ecuación queda:

$$(D^2 + 2\frac{p^2}{m} D + \frac{k^2}{m})\ u = 0$$

$$a = -\frac{p^2}{m} \pm \sqrt{\frac{p^4}{m^2} - \frac{k^2}{m}}$$

Discutiremos los valores de a según los valores de la discriminante:

1) Si $\frac{p^4}{m^2} > \frac{k^2}{m}$ $\qquad p^2 > k\sqrt{m}$

a_1 y a_2 son reales y negativos o sea:

$$a_1 < 0 \qquad a_2 < 0$$

La solución de la ecuación la obtenemos:

$$(D - a_1)(D - a_2)\ u = 0$$

$$u = C_1\ e^{a_1 t} + C_2\ e^{a_2 t}$$

Se vé que $u \longrightarrow 0$ cuando $t \longrightarrow$

2) Si $\dfrac{p^4}{m^2} = \dfrac{k^2}{m} \qquad p^2 = k\sqrt{m}$

$$a_1 = a_2 \qquad a_1 = a_2 < 0$$

La ecuación queda:

$$(D - a)^{+2}\ u = 0$$

$$u = (D - a)^{-2} 0$$

$$= (D - a)^{-1} \left[(D - a)^{-1}\ 0 \right]$$

$$u = (D - a)^{-1} \left[C\ e^{at} + 0 \right]$$

$$u = C_1\ t\ e^{at} + C_2\ e^{at}$$

Se vé que $u \longrightarrow 0$ cuando $t \longrightarrow$

2) Si $\dfrac{p^4}{m^2} < \dfrac{k^2}{m} \qquad p^2 < k\sqrt{m}$

a_1 y a_2 son complejos conjugados.

$$a = -\frac{p^2}{m} \pm \omega i = -\varepsilon \pm \omega i$$

siendo $$\omega^2 = \frac{k^2}{m} - \frac{p^4}{m^2}$$

y $$\varepsilon = \frac{p^2}{m}$$

Este caso es parecido al que se trató en el ejemplo 1). La solución de la ecuación es:

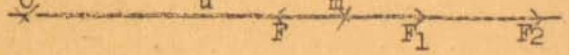
$$u = e^{-\varepsilon t} \left(C_1 e^{\omega i t} + C_2 e^{-\omega i t}\right)$$

o bien: $$u = C e^{-\varepsilon t} \cos(\omega t - \delta)$$

Para determinar las constantes en las ecuaciones del movimiento para los tres casos hay que darse las condiciones iniciales del problema.

4) Supóngase el mismo problema del caso anterior pero en el cual además de la fuerza elástica y la amortiguadora exista una fuerza externa, casi periódica F_2

$$F_2 = 7 e^{\frac{1}{2}t} \cos 2t$$



La ecuación del movimiento sería:

$$\frac{d^2u}{dt^2} = -25u - 6\frac{du}{dt} + 7e^{-\frac{1}{2}t} \cos 2t$$

suponiendo que los valores de las constantes sean los de la ecuación.

Para resolverla tenemos:

$$(D^2 + 6D + 25)u = 7 e^{-\frac{1}{2}t} \cos 2t$$

en vez de cos 2 t ponemos e^{2it}. Siendo u = parte real de U, se tiene:

$$(D^2 + 6D + 25)\, U = 7\, e^{(-\frac{1}{2}+2i)t}$$

Busquemos la solución régimen:

$$U = 7\, \frac{e^{(-\frac{1}{2}+2i)t}}{(-\frac{1}{2}+2i)^2 + 6(-\frac{1}{2}+2i) + 25}$$

$$U = \frac{7\, e^{-\frac{1}{2}t}\, e^{2it}}{(10\, i + 18{,}25)}$$

$$10,\ i + 18{,}25 = 20{,}8\, e^{0{,}495\, it}$$

$$u = 0{,}337\, e^{\frac{1}{2}t} \cos(2t + 0{,}495)$$

Para la transiente:

$$a^2 + 6a + 25 = 0$$

$$a = -3 \pm \sqrt{9 - 25} = -3 \pm \sqrt{-16}$$

$$a = -3 \pm 4i$$

o sea, la transiente será:

$$C\, e^{-3t} \cos(4t - \delta)$$

Luego la solución completa de la ecuación es:

$$u = -0{,}337\, e^{\frac{1}{2}t} \cos(2t + 0{,}495) + C\, e^{-3t} \cos(4t - \delta)$$

Veremos a continuación algunas aplicaciones a la electricidad.

1) Sea el caso de la descarga de un condensador. Supongamos un condensador cuya capacidad sea C y que tiene en un instante una carga Q_o. Si se unen los extremos se combinan las electricidades de las armaduras pasando corriente durante un tiempo muy pequeño por el circuito que une los extremos de la armadura.

Supongamos que este circuito esté formado por una resistencia puramente óhmica, un enrollado de autoinducción L y una fuerza electromotriz alterna E.

La carga Q variará del valor Q_o hasta 0. Se trata de encontrar la función que relaciona la carga con el tiempo.

Escribiendo la ley general de Ohm:

$$I\ R = \Delta V + e' + E$$

Siendo ΔV dif. de potencial entre las armaduras del condensador; e' la fuerza electromotriz de inducción producida por la variación de flujo al variar la carga y R la resistencia.

O sea:

$$e' = - \frac{d\varphi}{dt}$$

pero $\varphi = L\ I$

luego: $e' = - L \frac{dI}{dt}$

u haciendo $\frac{d}{dt} = D$

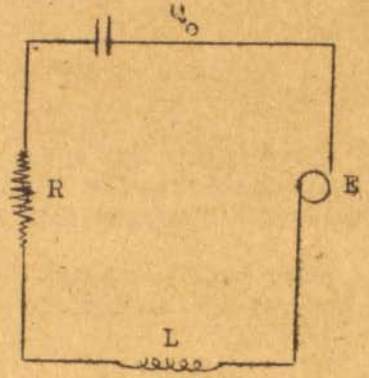
$$e' = - L\ D\ I$$

$$\Delta V = \frac{Q}{C}$$

pero $$I = -\frac{dQ}{dt} = -DQ$$

de donde; $$Q = -D^{-1} I$$

$$\Delta V = -\frac{I}{C D}$$



Luego la ecuación queda;

$$R I + L D I + \frac{I}{C D} = E$$

o bien;

$$\left(R + L D + \frac{1}{C D}\right) I = E$$

esta es la ecuación diferencial de un circuito simple.

Veremos algunos casos particulares.

Si no hay fuerza electromotriz externa E = 0 y la ecuación queda;

$$\left(R + L D + \frac{1}{C D}\right) I = 0$$

1) Supongamos que la inducción sea muy pequeña o sea que podemos poner L = 0. La ecuación queda;

$$\left(R + \frac{1}{C D}\right) I = 0$$

$$\frac{C\,R\,D+1}{C\,D}\ I=0$$

de donde:

$$(C\,R\,D+1)\ I=0$$

$$(D+\frac{1}{C\,R})\ I=0$$

luego:

$$I=(D+\frac{1}{C\,R})^{-1}\,0$$

de donde:

$$I=K\,e^{-\frac{t}{C\,R}}$$

pero:

$$\frac{dQ}{dt}=-I$$

$$Q=K\ C\ R\ e^{-\frac{t}{C\,R}}+K'$$

al transcurrir el tiempo la carga tiende a hacerse cero. O sea;

para $t=\infty$ $\quad Q=0$ $\quad$ o sea $\quad K'=0$

$t=0$ $\quad Q=Q_o$

luego $\quad K\,C\,R=Q_o \quad$ y $\quad K=\frac{Q_o}{C\,R}$

$$I=\frac{Q_o}{C\,R}\,e^{-\frac{t}{C\,R}}$$

2) Supongamos ahora que la resistencia es casi nula o sea que podemos poner $R=0$.

La ecuación queda;

$$(L\,D+\frac{1}{C\,D})\ I=0$$

o lo que es igual:

$$(D^2 + \frac{1}{C\,L})I = 0$$

haciendo $\omega = \frac{1}{\sqrt{C\,L}}$ (Fórmula de Thompson)

se tiene: $(D^2 + \omega^2)\, I = 0$

cuya solución vimos que era:

$$I = C_1\ e^{\omega i t} + C_2\ e^{-\omega i t}$$

o bien: $I = I_o \cos(\omega t + \delta)$

pero para $t = 0 \qquad I = I_o$

o sea: $\cos \delta = 1$ y $\delta = o$

Luego la ecuación final es:

$$I = I_o \cos \frac{t}{\sqrt{L\,C}}$$

3) Resolveremos ahora el caso general, pero siempre con R pequeño, o sea:

$$R^2 \ll \frac{C}{L}$$

$$(R + L\,D + \frac{1}{C\,D})\ I = 0$$

$$(R\,C\,D + L\,C\,D^2 + 1)\ I = 0$$

o sea: $(L\,C\,D^2 + R\,C\,D + 1)\ I = 0$

Calculemos a_1 y a_2; soluciones de:

$$L C a^2 + R C a + 1 = 0$$

$$a = -\frac{R}{2L} \pm i\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} = -\frac{R}{2L} \pm i\frac{1}{\sqrt{LC}}\sqrt{\left(1 - \frac{R^2 C}{4L}\right)}$$

luego, haciendo

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}\sqrt{\left(1 - \frac{R^2 C}{4L}\right)}$$

la solución nos queda:

$$I = A\, e^{-\frac{R}{2L}t} \cos(\omega t + \delta)$$

4) Resolvamos la ecuación con segundo miembro. Sea ésta:

$$\left(R + L D + \frac{1}{C D}\right) I = E$$

en la cual: $R = 100\ \Omega$ $\quad 0 \leqslant L \leqslant 30$

$C = 10^{-6}$ F $\quad E = 220 \operatorname{sen} 314\, t$

Resulta: $\left(100 + L D \frac{10^8}{D}\right) I = 220\, e^{314\, it}$

y reemplazando D por 314:

$$I = \frac{220\, e^{314 i\, t}}{100 + 314\, i\, L - 3.180\, i}$$

se nota que la corriente es máxima cuando el denominador es mínimo, es decir

$$L = \frac{3.180}{314} = 10,10$$

Veamos primero los valores de L distantes de 10,1; a saber; $L < 5$ y $L > 15$.

$$100 + (314\,L - 3.180)\,i \approx (314\,L - 3.180)\,i$$

(podemos despreciar 100 ya que es pequeño comparado con el otro sumando). La ecuación es:

$$I = \frac{220}{314\,L - 3.180}\, e^{(314\,t - \frac{\pi}{2})i}$$

y tomando debidamente la parte imaginaria:

$$I = \frac{0,7 \cos 314\,t}{10,1 - L}$$

La amplitud es 0,14. En este caso R resulta despreciable.

Ahora supongamos

$$10,0 < L < 10,2$$

Tenemos $$100 + (314\,L - 3,180)\,i \approx 100$$

ya que $(314\,L - 3.180)$ es despreciable en comparación con 100.

Luego, la solución es:

$$I = 2,2 \text{ sen } 314\,t$$

En este caso, se produce resonancia. Obsérvese la gran amplitud de este caso.

2) Sea el caso de una corriente alterna. Queremos determinar la expresión de la intensidad.

Sabemos que para la corriente alterna se tiene:

$$(R + L\,D)\ I = E_A$$

siendo $E_A = E_o \operatorname{sen} \omega t$

lo que podemos colocar como:

$$E_A = E_o\ e^{i\omega t}$$

Resulta:

$$I = \frac{E_o\ e^{\omega i t}}{R + L\omega i}$$

Tenemos:

$$R + L\omega I = \sqrt{R^2 + L^2\ \omega^2}\ \ e^{i\delta}$$

en que

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{L\omega}{R}$$

y reemplazando en el resultado se obtiene:

$$I = \frac{E_o}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} \operatorname{sen}(\omega t - \delta)$$

que es la expresión buscada para la intensidad (amplitud de fase) de la corriente alterna.

RESOLUCION DE ECUACIONES DIFERENCIALES POR MEDIO DE SOLUCIONES PARTICULARES

GENERALIDADES:

No pretendemos en este capítulo, abordar el estudio completo de las ecuaciones diferenciales, por ser dicho estudio, objeto fundamental del Análisis Infinitesimal y no de nuestro ramo.

Sin embargo, daremos en este capítulo, algunas indicaciones, que permiten la resolución de algunos tipos fundamentales de ecuaciones diferenciales, especialmente las ecuaciones lineales de coeficientes variables.

Dedicaremos estas líneas a las ecuaciones diferenciales de segundo orden, en especial, por ser este tipo, el que con más frecuencia aparece en los problemas de la Física y especialmente en el campo de la Mecanica Racional.

Ecuaciones diferenciales de Segundo Orden:

Consideremos la ecuación lineal de coeficientes variables:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + A(x)\frac{dy}{dx} + B(x)\,y = R(x) \qquad (1)$$

Intentaremos resolver esta ecuación, por medio de sus soluciones particulares, y mostraremos que su solución general se obtiene de: Dos soluciones particulares independientes de la ecuación sin segundo miembro, y una solución particular de la ecuación con segundo miembro.

Supongamos que por cualquier procedimiento logramos encontrar dos soluciones particulares de la ecuación:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + A(x)\frac{dy}{dx} + B(x)y = 0 \qquad (2)$$

y sean ellas:

$$\bar{y}_1 = f_1(x) \quad e \quad \bar{y}_2 = f_2(x)$$

Si reemplazamos $y = C_1\,\bar{y}_1$ en la ecuación(2), obtenemos:

$$C_1\left[\frac{d^2\bar{y}_1}{dx^2} + A(x)\frac{d\bar{y}_1}{dx} + B(x)\,\bar{y}_1\right] = 0$$

por ser $\bar{y}_1$ una solución de la ecuación, podemos afirmar que:

$$y = C_1\,\bar{y}_1 \quad e \quad y = C_2\,\bar{y}_2$$

satisfacen la ecuación (2) es decir son soluciones de ella.

Formemos ahora la suma:

$$y = C_1\,\bar{y}_1 + C_2\,\bar{y}_2$$

y reemplacemos en la ecuación (2). Obtenemos:

$$C_1\left[\frac{d^2\bar{y}_1}{dx^2} + A(x)\frac{d\bar{y}_1}{dx} + B(x)\bar{y}_1\right] + C_2\left[\frac{d^2\bar{y}_2}{dx^2} + A(x)\frac{d\bar{y}_2}{dx} + B(x)\bar{y}_2\right] = 0$$

y como cada corchete se anula separadamente, deducimos que:

$$y = C_1\ \bar{y}_1 + C_2\ \bar{y}_2$$

es también solución de la ecuación (2). El que se verifique esta propiedad, se llama "Principio de superposición".

Escribimos ahora la función:

$$y = C_1\bar{y}_1 + C_2\bar{y}_2 + \bar{y} \qquad (3)$$

siendo $\bar{y}$ una solución particular de la ecuación (1) (con segundo miembro). Esta función debe satisfacer la ecuación propuesta, ya que sus dos primeros términos son soluciones de la ecuación sin segundo miembro, y el tercero, satisface la ecuación total.

Por contener dos constantes arbitrarias, (3) constituye la solución general de nuestra ecuación diferencial, a menos que se verifique que:

$$\frac{\bar{y}_2}{\bar{y}_1} = C^{te}$$

es decir que ambas soluciones particulares sean linealmente dependientes.

En este caso, deberemos buscar una nueva solución particular de la ecuación (2), que encontraremos con ayuda de las fórmulas que luego deduciremos.

A pesar de lo dicho, se puede mostrar que basta el conocimiento de una de las dos soluciones particulares de la ecuación sin segundo miembro para poder resolver completamente la ecuación total.

Afirmamos ésto, ya que pueden calcularse: $\bar{y}_2$ e $\bar{y}$ en función de $\bar{y}_1$ y de los coeficientes de la ecuación, como lo veremos a continuación.

Sea la ecuación:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + A(x)\frac{dy}{dx} + B(x)\,y = R(x) \qquad (1)$$

Hagamos el cambio:

$$y = \bar{y}_1\, v$$

o sea:

$$y' = \bar{y}_1'\, v + \bar{y}_1\, v'$$

$$y'' = \bar{y}_1''\, v + 2\,\bar{y}_1'\, v' + \bar{y}_1\, v''$$

Sustituyendo en (1):

$$\bar{y}_1\, v'' + 2\,\bar{y}_1'\, v' + A(x)\,\bar{y}_1\, v' + v\,\bar{y}_1'' + A(x)\left[\bar{y}_1' + B(x)\,\bar{y}_1\right] = R(x)$$

Como $\bar{y}_1$ es solución de la ecuación sin segundo miembro, se verifica:

$$\bar{y}_1'' + A(x)\,\bar{y}_1' + B(x)\,\bar{y}_1 = 0$$

o sea, nos queda:

$$\bar{y}_1\, v'' + 2\,\bar{y}_1'\, v' + A(x)\,\bar{y}_1\, v' = R(x)$$

y dividiendo por $\bar{y}_1$ y poniendo $\frac{dv'}{dx} = v''$:

$$\frac{dv'}{dx} + \left[\frac{2\bar{y}_1'}{\bar{y}_1} + A(x)\right] v' = \frac{R(x)}{\bar{y}_1}$$

Esta ecuación que es lineal y de primer orden en v' se integra, como todas las de este tipo, haciendo:

$$v' = u\,z$$

y determinando una de estas funciones convenientemente.

$$v' = \frac{e^{-\int A(x)dx}}{\bar{y}_1^2} \int \bar{y}_1\, R(x)\, e^{\int A(x)dx} dx + \frac{C_2\, e^{\int A(x)dx}}{\bar{y}_1^2}$$

Para obtener v, integramos y en seguida teniendo en cuenta que:

$$y = \bar{y}_1\, v$$

obtenemos:

$$y = C_1 \bar{y}_1 + C_2\, \bar{y}_1 \int \frac{e^{-\int A(x)dx}}{\bar{y}_1^2}\, dx + \bar{y}_1 \int \frac{e^{-\int A(x)dx}}{\bar{y}_1^2} \int \bar{y}_1\, R(x)\, e^{\int A(x)dx}\, dx^2$$

Ahora, si comparamos esta expresión de la solución general de la ecuación diferencial con la ecuación

$$y = C_1\, \bar{y}_1 + C_2\, \bar{y}_2 + \bar{y}$$

decimos que;

$$\bar{y}_2 = \bar{y}_1 \int e^{-\frac{A(x)dx}{\bar{y}_1^2}} dx$$

$$\bar{y} = \bar{y}_1 \int \frac{e^{\int A(x)dx}}{\bar{y}_1^2} \int \bar{y}_1 \; R(x) \int A(x)dx \; dx^2 \qquad (5)$$

Hemos deducido estas fórmulas sólo como un medio de comprobación de los resultados que podamos obtener por medio de otros procedimientos, ya que ellas son largas de aplicar y fácilmente olvidables a causa de su complejidad.

Como los métodos que pueden utilizarse para obtener, directamente, las soluciones; y1 y2 o y son generalmente accidentales, no desarrollaremos una teoría al respecto, sino que mostraremos, por intermedio de algunos ejemplos los principales procedimientos útiles en esta clase de problemas.

Aplicaciones: a) Resolver la ecuación:

$$y'' + \frac{1}{x} y' - \frac{1}{x^2} y = x^3$$

Debemos primeramente resolverla sin segundo miembro, es decir encontrar la solución general de la ecuación:

$$y'' + \frac{1}{x} y' - \frac{1}{x^2} y = 0 \qquad (1)$$

Ensayemos una solución de la forma; $y = x^m$. Sustituyendo este valor de y en la ecuación;

$$m(m-1)x^{m-2} + m\,x^{m-2} - x^{m-2} = 0$$

es decir; $$(m^2 - 1)x^{m-2} = 0$$

que exige; $$m = \pm 1$$

Esto nos muestra que la ecuación, acepta soluciones de esta forma supuesta y que ellas son;

$$y_1 = x$$

$$y_2 = \frac{1}{x}$$

$y = C_1 x + \frac{C_2}{x}$

Nos falta ahora encontrar una solución particular de la ecuación primitiva;

$$y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = x^3 \qquad (2)$$

Supongamos que sea ella también de la forma; $y = A\ x^m$ (El lector justificará la aparición de la constante A). Reemplazando

$$A\,m(m-1)x^{m-2} + m\,A\,x^{m-2} - A\,x^{m-2} = x^3$$

o sea; $$(m^2 - 1)\,A\,x^{m-2} = x^3$$

Ahora, como esta ecuación debe satisfacerse idénticamente, debemos igualar las potencias de x;

Luego; $$m - 2 = 3$$

$$m = 5$$

La segunda condición es que;

$$(m^2 - 1)\,A = 1.$$

es decir: $$A = \frac{1}{25 - 1} = \frac{1}{24}$$

De modo que: $$\overline{y} = \frac{x^5}{24}$$

y la solución general de la ecuación resulta:

$$y = C_1 x + \frac{C_2}{x} + \frac{x^5}{24}$$

El método que más comunmente se usa, para el cálculo de la integral y, es el que en el Curso de Análi - sis, se conoce con el nombre de: "Variación de Constantes o Parámetros". Lo aplicaremos para calcular la solución $\overline{y}$, en nuestra ecuación.

Obtuvimos como solución general de (1):

$$y = C_1 x + \frac{C_2}{x}$$

Si deseamos ahora que esta misma expresión sea solución de (2), bastará hacer variar una de las dos constantes arbitrarias, y determinarla de modo que se satisfaga la condición que queremos imponer. En vez de ello, y por motivos de simetría haremos que ambas constantes pasen a ser funciones de x y como hemos introducido una segunda función desconocida, nos daremos una ecuación arbitraria que relacione ambas funciones: Calculemos y':

$$y' = C_1 - \frac{C_2}{x^2} + C_1' x + \frac{C_2'}{x}$$

e impongamos como condición que se verifique:

$$C_1' x + \frac{C_2'}{x} = 0$$

Calculando en seguida y";

$$y'' = C_1' + \frac{2\,C_2}{x^3} - \frac{C_2'}{x^2}$$

Ahora, como queremos que y, y' e y" verifiquen la ecuación (2), sustituímos estos valores en ella, y después de reducir, encontramos;

$$C_1' - \frac{C_2'}{x^2} = x^3$$

Esta ecuación, unida a la condición que impusimos anteriormente, dan el sistema;

$$C_1' x - \frac{C_2'}{x} = x^4$$

$$C_1' x + \frac{C_2'}{x} = 0$$

que resuelto con respecto a C_1' y C_2' dá;

$$C_1' = \frac{x^3}{2}$$

y

$$C_2' = -\frac{x^5}{2}$$

Integrando estas dos últimas ecuaciones, se tiene;

$$C_1 = \frac{x^4}{8} + c_1$$

$$C_2 = -\frac{x^6}{12} + c_2$$

Reemplazando estos valores en la ecuación:

$$y = C_1 \; x + \frac{C_2}{x}$$

se obtiene después de reducir:

$$y = c_1 \, x + \frac{c_2}{x} + \frac{x^5}{24}$$

resultado que sirve de verificación.

En el caso general de una ecuación de orden n, conviene imponer como condiciones arbitrarias, que tanto la función y, como sus (n-1) primeras derivadas sean comunes a las ecuaciones, con y sin segundo miembro.

Apliquemos, por último las fórmulas (4) y (5) partiendo de la solución $y_1 = x$ y teniendo en cuenta que se tiene:

$$A(x) = \frac{1}{x} \quad y \quad (R(x) = x^3$$

Por aplicación directa, se obtiene:

$$y_2 = x \int \frac{e^{\int -\frac{dx}{x}}}{x^2} \, dx = x \int \frac{e^{-\text{Log } x}}{x^2} \, dx = x \int \frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x}$$

$$y = x \int \frac{e^{-\text{Log } x}}{x^2} \int x \cdot x^3 \, e^{\text{Log } x} \, dx \, dx = x \int \frac{1}{x^3} \int x^5 \, dx \, dx$$

de donde se obtiene:

$$y = x \int \frac{x^6}{6 \, x^3} \, dx = \frac{x}{6} \int x^3 \, dx = \frac{x^5}{24}$$

Como solución final, se obtiene entonces:

$$y = C_1 x + \frac{C_2}{x} + \frac{x^5}{24}$$

que comprueba la fidelidad de las fórmulas deducidas.

b) Resolver la ecuación:

$$x^2 y'' + 2 x y' - 6 y = \frac{\ln x}{x^2}$$

Escribamos primeramente:

$$y'' + \frac{2}{x} y' - \frac{6}{x^2} y = \frac{\ln x}{x^4}$$

Por ser el primer miembro de la ecuación del mismo tipo de homogeneidad del problema anterior, resolvémosla primeramente sin segundo miembro, suponiendo $y = x^m$:

Nos queda:

$$m(m-1)x^{m-2} + 2 m x^{m-2} - 6 x^{m-2} = 0$$

o sea:

$$x^{m-2} (m^2 + m - 6) = 0$$

que exige:

$$m^2 + m - 6 = 0$$

Esta ecuación tiene como raíces: $m_1 = 2$ y $m_2 = -3$ de modo que la solución general de la ecuación sin segundo miembro es:

$$y = C_1 x^2 + C_2 x^{-3}$$

es decir:

$$\bar{y}_1 = x^2 \quad \text{e} \quad \bar{y}_2 = x^{-3}$$

En cuanto a la tercera solución $\bar{y}$, es lógico

admitir, que no resulta posible adivinar la forma de ella, a causa de la forma complicada del segundo miembro.

Sin otro recurso, aplicamos la fórmula (5) que nos da esta solución en función de $\overline{y}_1$:

$$\overline{y} = x^2 \int \frac{e^{-\int 2\frac{dx}{x}}}{x^4} \int x^2 \ln x \frac{e^{\int 2\frac{dx}{x}}}{x^4} \, dx \, dx$$

$$\overline{y} = x^2 \int \frac{e^{-\ln x^2}}{x^4} \int x^2 \ln x \frac{e^{\ln x^2}}{x^4} \, dx \, dx$$

$$\overline{y} = x^2 \int \frac{1}{x^6} \int \ln x \, dx \, dx$$

Ahora bien:

$$\int \ln x \, dx = x(\ln x - 1)$$

o sea:

$$\overline{y} = x^2 \int \frac{x(\ln x - 1)}{x^6} \, dx$$

y separando:

$$\overline{y} = x^2 \int \frac{\ln x}{x^5} \, dx - x^2 \int \frac{dx}{x^5}$$

En seguida, de la ecuación:

$$d\left(\frac{1}{x^4}\right) = \frac{-4}{x^5} \, dx$$

sacamos:

$$\frac{dx}{x^5} = -\frac{1}{4} \, d\left(\frac{1}{x^4}\right)$$

$$y = -\frac{x^2}{4}\int \ln x \, d\left(\frac{1}{x^4}\right) + \frac{x^2}{4} \cdot \frac{1}{x^4}$$

e integrando por partes, el primer término:

$$y = \frac{x^2}{4\,x^4}\ln x + \frac{x^2}{4}\int \frac{dx}{x^5} + \frac{1}{4\,x^2}$$

y efectuando la integral y reduciendo se llega a:

$$y = \frac{3}{16\,x^2} - \frac{1}{4\,x^2}\ln x$$

Con esto, la colución general, es:

$$y = C_1 x^2 + \frac{C_2}{x^3} + \frac{3}{16\,x^2} - \frac{1}{4\,x^2}\cdot \ln x$$

Hemos estudiado, por medio de las aplicaciones anteriores, un método para averiguar si una ecuación diferencial dada, acepta soluciones particulares del tipo potencia. Veremos por intermedio del ejemplo siguiente, como podemos llevar a cabo la búsqueda de soluciones exponenciales:

c) Resolver la ecuación:

$$y'' - \left(1+\frac{1}{x}\right) y' - 2\left(1 - \frac{1}{x}\right)y = 0$$

Démosle forma entera:

$$x\,y'' - (x+1)y' - 2(x-1)y = 0$$

Para averiguar si esta ecuación acepta soluciones exponenciales, reemplacemos y por e^{mx} por ejemplo, y observemos si para algún valor de m, la ecuación se satisface idénticamente:

Nos queda:

$$x\,m^2\,e^{mx} - (x+1)m\,e^{mx} - 2(x-1)e^{mx} = 0 \quad (1)$$

Dividiendo por e^{mx}:

$$x\,m^2 - (x+1)m - 2(x-1) = 0$$

Resolviendo la ecuación con respecto a m:

$$m = \frac{x+1 \pm \sqrt{9x^2 - 6x + 1}}{2x}$$

es decir: $$m = \frac{x+1 \pm 3x - 1}{2x}$$

que dá como soluciones:

$$m_1 = 2$$

$$m_2 = \frac{1-x}{x}$$

Como se vé, la primera solución ha resultado independiente de x, de modo que $m = 2$, verifica la ecuación (1) lo que muestra que $y_1 = e^{2x}$ es solución de la ecuación. (Se comprende que la solución m_2 no es aceptable).

Notando que:

$$A(x) = -\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

calculamos inmediatamente:

$$y_2 = e^{2x}\int \frac{e^{\left(1+\frac{1}{x}\right)dx}}{e^{4x}}\,dx = e^{2x}\int e^{-3x}x\,dx$$

y calculando esta integral, se encuentra finalmente:

$$\bar{y}_2 = -\frac{1}{9}(3x+1)\,e^{-x}$$

y si englobamos la cantidad $-\frac{1}{9}$ en la constante C_2, obtenemos:

$$y = C_1\,e^{2x} + C_2(1+3x)\,e^{-x}$$

como solución general del problema.

Hacemos notar que la propiedad de las exponenciales, de reproducirse en todas sus derivadas, permite en casos como el presente, dividir toda la ecuación por la exponencial que intentamos ensayar. Podemos formular entonces la siguiente regla práctica. En el caso particular en que la suma algebraica de los coeficientes de una ecuación diferencial resulte nula, dicha ecuación admite como solución particular la exponencial e^x.

Esta propiedad se demuestra fácilmente, notando que al sustituir y por e^x en una ecuación diferencial, sus derivadas, y' y''... etc., permanecen idénticas a e^x de modo que al dividir la ecuación por dicha cantidad, sólo queda la suma algebraica de sus coeficientes, que ha de anularse si e^x es solución.

Resolveremos, por último, un problema en que averiguaremos la posibilidad de soluciones, formadas por combinación de funciones exponenciales y algebraicas:

d) Resolver la ecuación:

$$y'' + \frac{4}{x}y' + \frac{2y}{x^2} - m^2 y = 0$$

Si probamos soluciones de la forma $y = x^p$ nos

resulta un grupo de términos multiplicados por x^{p-2} y sólo uno multiplicado por m^2 lo que sólo será posible si $m=0$. Supondremos $m \neq 0$.

Ensayemos entonces, soluciones de la forma:

$$y = e^{nx} \; x^p$$

y veamos si es posible la determinación de los parámetros n y p:

Calculemos:

$$y' = (p\, x^{p-1} + n\, x^p)\, e^{nx}$$

$$y'' = \left[p(p-1)x^{p-2} + 2\, p\, n\, x^{p-1} + n^2\, x^p\right] e^{nx}$$

Reemplazando estos valores en la ecuación, dividiendo por e^{nx} y agrupando términos obtenemos:

$$\left[p(p-1) + 4\, p\, 2\right] x^{p-2} + (2\, p\, n + 4\, n)x^{-p-1} + (n^2 - m^2)x^p = 0$$

Para que la solución ensayada sea posible, debe verificarse esta ecuación, para todo valor de x, es decir, debe tener soluciones comunes el sistema:

$$p^2 + 3\, p + 2 = 0$$

$$2n(p+2) = 0$$

$$n^2 - m^2 = 0$$

La última exige: $n = m$ o bien $n = -m$

La segunda: $p = -2$ ya que $n \neq 0$ y si observamos que la primera ecuación se verifica para este valor de p, podemos

afirmar que nuestra suposición ha sido afortunada, y que las soluciones particulares buscadas son:

$$\bar{y}_1 = x^{-2}\ e^{mx} \quad \text{e} \quad \bar{y}_2 = x^{-2}\ e^{-mx}$$

de modo que la solución general resulta:

$$y = C_1\ x^{-2}\ e^{mx} + C_2\ x^{-2}\ e^{-mx}$$

RESOLUCION DE ECUACIONES DIFERENCIALES POR MEDIO DE DESARROLLOS EN SERIE

GENERALIDADES:

A lo largo del Cálculo Integral, se presentan en variadas ocasiones, problemas, que a primera vista, no tienen solución. Decimos a menudo esto, cuando nos encontramos ante una ecuación diferencial, por ejemplo, cuya solución, no puede expresarse en términos finitos, o bien cuando pretendemos calcular una integral, que no puede efectuarse por medio de funciones elementales.

En casos como éstos, es común recurrir a las soluciones por series, es decir, imaginar que una serie convergente, es solución del problema, e imponiéndole a dicha serie tal condición, calcular la ley de formación de sus términos.

El problema puede llevarse aún más lejos, ya que si en el resultado obtenido, logramos reconocer el desarrollo de alguna función elemental o de alguna combinación de ellas, nos es posible, nuevamente, expresar nuestros resultado en forma finita.

En Matemáticas Aplicadas, el procedimiento de los desarrollos en serie tiene gran importancia, ya que permite operar con funciones-potencias, que son fácilmente calculables..Por otra parte, se acostumbra limitar dichos desarrollos, conservando sólo la cantidad de términos necesarios para la aproximación que se exige.

Nos ocuparemos en este capítulo solamente de las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden y trataremos primeramente el caso de las ecuaciones sin segundo miembro, dejando para más adelante el caso general.

Ecuaciones diferenciales lineales de Segundo Orden:

Intentemos resolver la ecuación lineal en su forma más general.

$$y'' + A(x)\ y' + B(x)\ y = 0$$

de modo que su solución sea una serie convergente, de la forma:

$$y = \sum_{0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \qquad (1)$$

Desarrollemos los coeficientes: A(x) y B(x) en series de potencias de $(x - x_0)$ de modo que se tenga:

$$A(x) = p_0 + p_1 (x - x_0) + p_2 (x - x_0)^2 + \dots + \dots \qquad (2)$$

$$B(x) = q_0 + q_1 (x - x_0) + q_2 (x - x_0)^2 + \dots + \dots$$

Escribiendo, en seguida, la solución en la forma:

$$y = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + \dots + \dots$$

y luego derivando con respecto a x, suponiendo, por cierto, que la operación sea lícita:

$$y' = a_1 + 2\,a_2(x - x_o) + 3\,a_3(x - x_o)^2 + \dots + \dots$$

e

$$y'' = 2\,a_2 + 6\,a_3(x - x_o) + 12\,a_4(x - x_o)^2 + \dots + \dots$$

Reemplazando estos valores en la ecuación, y teniendo en cuenta las ecuaciones (2), se obtiene, después de ordenar:

$$(a_o q_o + a_1 p_o + 2\,a_2) + (a_1 q_o + a_o q_1 + a_1 p_1 + 2\,a_2 p_o + 6\,a_3)$$

$$(x - x_o) + \dots + \dots = 0$$

Como esta ecuación debe verificarse para cualquier valor de $(x - x_o)$, los coeficientes de cada una de sus potencias, han de anularse separadamente, es decir:

$$\begin{aligned} a_o q_o + a_1 p_o + 2\,a_2 &= 0 \\ a_1 q_o + a_o q_1 + a_1 p_1 + 2\,a_2 p_o + 6\,a_3 &= 0 \qquad (3) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \end{aligned}$$

De estas ecuaciones, sacamos:

$$a_2 = -\frac{a_o q_o + a_1 p_o}{2}$$

$$a_3 = -\frac{a_o (q_1 - p_o q_o) + a_1 (q_o + p_1 - p_o p_1)}{6}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Observando que en cada uno de estos términos aparecen las dos constantes a_o y a_1, podremos inmediatamente deducir, que el coeficiente de rango n, por ejemplo, valdrá:

$$a_n = a_o A_n + a_1 B_n$$

en que A_n y B_n, son funciones de los p y los q.

Ahora, hemos propuesto una solución de la forma:

$$y = \sum_{o}^{\infty} a_n (x - x_o)^n$$

y reemplazando a_n en esta ecuación encontramos:

$$y = a_o \sum_{o}^{\infty} A_n (x - x_o)^n + a_1 \sum_{o}^{\infty} B_n (x - x_o)^n$$

Esta igualdad representa la solución general de la ecuación diferencial, ya que contiene dos constantes arbitrarias a_o y a_1. Ella muestra además, que cada solución particular, de la ecuación, queda representada por una serie independiente, es decir:

$$y1 = \sum_{o}^{\infty} A_n (x - x_o)^n$$

$$y2 = \sum_{o}^{\infty} B_n (x - x_o)^n$$

Resolveremos, a continuación, una aplicación para ilustrar el procedimiento que acabamos de tratar:

APLICACION:

Resolver la ecuación diferencial:

$$y'' + \frac{1}{x} y' + y = 0$$

obteniendo su solución en serie de potencias de $(x - 1)$:

Primeramente ponemos:

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{1+(x-1)} = 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + \ldots$$
$$\ldots \pm \ldots \quad x < 2$$

Sea ahora la solución:

$$y = a_o + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + a_3(x-1)^3 \ldots \ldots \quad (1)$$

de modo que: $\frac{1}{x}$

$$y' = a_1 + 2a_2(x-1) + 3a_3(x-1)^2 + \ldots + \ldots$$

$$y'' = 2a_2 + 6a_3(x-1) + 12a_4(x-1)^2 + \ldots + \ldots$$

Multiplicando y' por el desarrollo de $\frac{1}{x}$ y sumando las tres ecuaciones, encontramos:

$$(a_o + a_1 + 2a_2) + (a_1 - a_1 + 6a_3 + 2a_2)(x-1) +$$

$$+ (a_2 + 12a_4 + 3a_3 - 2a_2 + a_1)(x-1)^2 + \ldots = 0$$

Anulando cada una de las potencias de $(x-1)$, para que se verifique idénticamente esta ecuación:

$$a_o + a_1 + 2a_2 = 0$$

$$6a_3 + 2a_2 = 0$$

$$12a_4 + 3a_3 + a_1 - a_2 = 0$$

. . . . . .

De este sistema despejamos:

$$a_2 = -\frac{a_o}{2} - \frac{a_1}{2}$$

$12a_4 = a_0 - 2a_1$

$3a_3 = \frac{a_0}{2} + \frac{a_1}{2}$

$a_1 = a_1$

$-a_2 = +\frac{a_0}{2} + \frac{a_1}{2}$

$0 = 0$

$$a_3 = \frac{a_0}{6} + \frac{a_1}{6}$$

$$a_4 = -\frac{a_0}{12} - \frac{a_1}{6};$$

y reemplazando estos coeficientes en (1) y reduciendo:

$$y = a_0\left[1 - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{6}(x-1)^3 - \frac{1}{12}(x-1)^4 + \ldots + \ldots\right] +$$

$$+ a_1\left[(x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{6}(x-1)^3 \quad \frac{1}{6}(x-1)^4 + \ldots + \ldots\right]$$

Como se puede apreciar, esta ecuación, constituye la solución general de la ecuación, y los corchetes, representan sus dos soluciones particulares y_1 e y_2, siendo a_0 y a_1, dos constantes arbitrarias.

Soluciones de la forma: $y = \sum_0^\infty a_n x^n$.

Nos ocuparemos, en este párrafo de la solución de las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden, por medio de este nuevo tipo de serie, que, como se ve, constituye un caso particular en relación al procedimiento tratado anteriormente.

Sin incurrir en mayores demostraciones, adoptaremos como condición necesaria, para que una ecuación diferencial sea solucionable por medio de desarrollos en serie de potencias de x, el que sus coeficientes sean también desarrollables en el mismo tipo de serie. Decimos esto, al referirnos a la búsqueda directa de soluciones por medio de la serie:

$$y = \sum_0^\infty a_n x^n \qquad (1)$$

ya que más adelante veremos, que aún en casos en los cuales los coeficientes de la ecuación, no cumplen la condición de ser desarrollables, puede, en determinadas ocasiones, encontrarse la solución en la forma buscada, con la ayuda de un procedimiento más general.

El modo en que debemos proceder, es el mismo estudiado en el párrafo anterior y consiste en determinar los coeficientes de la suma (1), de manero que y satisfaga la ecuación diferencial.

Aplicación: Resolver la ecuación:

$$y'' - x\,y' - m\,y = 0$$

en que m es un parámetro cualquiera.

Sea la solución buscada:

$$y = \sum_{0}^{\infty} a_n\, x^n$$

que supondremos sea una serie convergente, y por lo tanto como se sabe, derivable término a término.

Entonces:

$$y' = \sum_{0}^{\infty} n\, a_n\, x^{n-1}$$

e $$y'' = \sum_{0}^{\infty} (n-1)\, a_n\, x^{n-2}$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación, se tiene:

$$\sum_{0}^{\infty} \left[n(n-1) a_n\, x^{n-2} - n\, a_n\, x^n - m\, a_n\, x^n \right] = 0$$

y reduciendo:

$$\sum_{0}^{\infty} \left[n(n-1) a_n\, x^{n-2} - (m+n) a_n\, x^n \right] = 0$$

Para que esta suma sea nula, para cualquier valor de x, deben anularse separadamente, cada uno de los coeficientes de las potencias de x.

El coeficiente de x^{n-2}, por ejemplo, estará formado por el término $n(n-1)a_n$ y por el que se obtenga de $-(m+n)a_n$, cambiando n por n-2.

Anulando este coeficiente, se tiene:

$$n(n-1)a_n - (m+n-2)a_{n-2} = 0$$

de donde sale: $$a_n = \frac{m+n-2}{n(n-1)} a_{n-2} \qquad (n > 1)$$

Dando valores a n, a partir de n = 2, encontramos:

$$a_2 = \frac{m}{1.2} a_0 = \frac{m}{2!} a_0$$

$$a_3 = \frac{m+1}{2.3} a_1 = \frac{m+1}{3!} a_1$$

$$a_4 = \frac{m+2}{3.4} a_2 = \frac{m(m+2)}{4!} a_0$$

$$a_5 = \frac{m+3}{4.5} a_3 = \frac{(m+1)(m+3)}{5!} a_1$$

. . . . . .

Reemplazando estos valores en la ecuación:

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + \ldots$$

se obtiene:

$$y = a_o \left[1 + \frac{m}{2!} x^2 + \frac{m(m+2)}{4!} x^4 + \dots + \dots\right] +$$

$$+ a_1 \left[x + \frac{m+1}{3!} x^3 + \frac{(m+1)(m+3)}{5!} x^5 + \dots + \dots\right]$$

Esta ecuación representa la solución que buscamos, y como se vé, contiene dos constantes arbitrarias: a_o y a_1, por ser solución de una ecuación diferencial de segundo orden.

Aunque más adelante hablaremos de esto, preguntémonos para que valores de m, existe una solución en forma de polinomio (Finito), es decir, cuando se anulan todos los últimos coeficientes del desarrollo.

Esto ocurre, evidentemente, cuando m es un entero negativo.

Veamos, como ejemplo, el desarrollo que se obtiene para $m = -3$, y eligiendo $a_o = 0$:

La solución queda en este caso:

$$y = a_1 \left[x + \frac{-4}{3!} x^3 + \frac{(-4)(-2)}{5!} x^5 + 0 + 0 \dots\right]$$

o sea:

$$y = a_1 \left(x - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^5}{15}\right)$$

Haremos una segunda aplicación, en la cual trataremos de interpretar la serie que obtengamos, para poder expresarla por medio de las funciones clásicas.

Aplicación: Resolver la ecuación:

$$y'' - m^2 y = 0$$

Supongamos y de la forma:

$$y = \sum_0^\infty a_n x^n$$

Entonces:

$$y' = \sum_0^\infty n a_n x^{n-1}$$

$$y'' = \sum_0^\infty n(n-1) a_n x^{n-2}$$

y reemplazando en la ecuación:

$$\sum_0^\infty \left[n(n-1) a_n x^{n-2} - m^2 a_n x^n \right] = 0$$

Anulando, ahora, el coeficiente de x^{n-2}, como de costumbre:

$$n(n-1)a_n - m^2 a_{n-2} = 0$$

de donde sacamos:

$$a_n = \frac{m^2}{n(n-1)} a_{n-2}$$

y dando valores a n, a partir de n = 2:

$$a_2 = \frac{m^2}{1 \cdot 2} a_0 = \frac{m^2}{2!} a_0$$

$$a_3 = \frac{m^2}{2 \cdot 3} a_1 = \frac{m^2}{3!} a_1$$

$$a_4 = \frac{m^2}{4 \cdot 3} a_2 = \frac{m^4}{4!} a_0$$

$$a_5 = \frac{m^2}{5 \cdot 4} a_3 = \frac{m^4}{5!} a_1$$

Sustituyendo los coeficientes en la ecuación:

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + \dots$$

se encuentra:

$$y = a_0 \left[1 + \frac{m^2 x^2}{2!} + \frac{m^4 x^4}{4!} + \dots\right] + a_1 \left[x + \frac{m^2 x^3}{3!} + \frac{m^4 x^5}{5!} + \dots\right]$$

Para simetría del desarrollo, pongamos $a_1 = m a_1'$ de modo que:

$$y = a_0 \left[1 + \frac{m^2 x^2}{2!} + \frac{m^4 x^4}{4!} + \dots\right] + a_1' \left[mx + \frac{m^3 x^3}{3!} + \frac{m^5 x^5}{5!} + \dots\right]$$

Poniendo ahora: $a_0 = C_0 + C_1$

$$a_1' = C_0 - C_1$$

y reemplazando encontramos:

$$y = C_0 \left[1 + mx + \frac{(mx)^2}{2!} + \frac{(mx)^3}{3!} + \dots\right] +$$

$$+ C_1 \left[1 - mx + \frac{(mx)^2}{2!} - \frac{(mx)^3}{3!} + \dots\right]$$

es decir: $y = C_0 e^{mx} + C_1 e^{-mx}$

que es un resultado bastante conocido.

Soluciones en serie de Potencias generalizadas:

Si nos proponemos encontrar la solución de la ecuación:

$$y'' + \frac{1}{x} y' + y = 0$$

expresada en serie de potencias de x, podemos interpretarlo, con la ayuda del procedimiento empleado en los ejemplos anteriores, pero tropezaremos con la imposibilidad de desarrollar en serie de potencias de x, su coeficiente $\frac{1}{x}$.

Ante esta dificultad, tendremos dos caminos a seguir:

a) Desarrollar el coeficiente $\frac{1}{x}$ en serie de otro tipo de potencias, por ejemplo:

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x_0}\left[1 + \frac{x - x_0}{x_0}\right]^{-1} = 1 - \frac{x - x_0}{x_0} + \left(\frac{x - x_0}{x_0}\right)^2 - \ldots + \ldots$$

y encontrar la solución en serie de la forma:

$$y = \sum_0^\infty a_n (x - x_0)^n$$

como ya lo hemos hecho en las primeras páginas de este capítulo, donde resolvimos este problema con $x_0 = 1$.

Como este no es nuestro objetivo, debemos recurrir a otro método.

b) El nuevo procedimiento, consiste en suponer la solución de la forma:

$$y = \sum_{0}^{\infty} a_n \; x^{p+n} \qquad (a_o \neq 0)$$

que llamaremos serie de potencias generalizadas. En esta serie, p es un parámetro que deberemos determinar con las condiciones del problema.

La ventaja de este método está en que permite trabajar con la ecuación reducida a su forma entera, es decir se evitan por su aplicación los coeficientes no desarrollables en serie, cuya estructura, es generalmente fraccionaria.

Nuestro nuevo método es aplicable a muchas ecuaciones de la forma:

$$y'' + \frac{A(x)}{C(x)} y' + \frac{B(x)}{D(x)} y = R(x)$$

Como nos hemos ocupado hasta ahora de las ecuaciones sin segundo miembro, hagamos $R(x) = 0$ y demos forma entera a la ecuación:

$$C(x)\,D(x)\,y'' + A(x)\,B(x)\,y' + B(x)\,C(x)\,y = 0$$

Como suponemos que las funciones: $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$, y $D(x)$ son desarrollables en serie de potencias, podremos llamar:

$$C(x)\,D(x) = a(x)$$

$$A(x)\,B(x) = b(x)$$

$$B(x)\,C(x) = c(x)$$

con lo cual la ecuación toma la forma:

$$a(x)\ y'' + b(x)y' + c(x)\ y = 0$$

donde las funciones a(x), b(x) y c(x) deben también ser desarrollables en serie algebraica.

La manera de determinar los coeficientes, de la serie solución, resulta análoga, en este caso, con los anteriores. Para la determinación de p, conviene poner n = 0 en la fórmula de recurrencia que dá los coeficientes, como lo mostraremos inmediatamente, por medio de un ejemplo.

Aplicación: Resolver la ecuación:

$$y'' + \left(\frac{m}{x} + 1\right)y' + \frac{m+1}{x}y = 0$$

Como los coeficientes de la ecuación, no son desarrollables en serie de potencias de x, demos forma entera:

$$x\,y'' + (m+x)y' + (m+1)y = 0$$

y supongamos y de la forma:

$$y = \sum_{0}^{\infty} a_n\ x^{p+n} \qquad (1)$$

que también podemos escribir:

$$y = x^p(a_0 + a_1\ x + a_2\ x^2 + a_3\ x^3 + \ldots) \qquad (2)$$

$$y' = \sum_{0}^{\infty} (p+n)a_n\ x^{p+n-1}$$

e

$$y'' = \sum_{0}^{\infty} (p+n)(p+n-1)a_n\ x^{p+n-2}$$

Sustituyendo y, y' e y'' en la ecuación:

$$\sum_{o}^{\infty}\Big[(p+n)(p+n-1)a_n\ x^{p+n-1} + (m+x)(p+n)a_n\ x^{p+n-1} + (m+1)a_n\ x^{p+n}\Big] = 0$$

que se escribe:

$$\sum_{o}^{\infty}\Big[(p+n)(p+n+m-1)a_n\ x^{p+n-1} + (p+n+m+1)a_n\ x^{p+n}\Big] = 0$$

y anulando el coeficiente de la potencia : x^{p+n-1} se obtiene:

$$(p+n)(p+n+m-1)a_n + (p+n+m)a_{n-1} = 0 \qquad (3)$$

Determinemos p, haciendo n=0.. Para este valor de n el segundo término es nulo, ya que a_{n-1}, no existe para n=0, con lo cual queda:

$$p(p+m-1)a_o = 0$$

Supongamos $a_o \neq 0$; entonces, esta ecuación, se verifica, para:

a) $p=0$

b) $p=1-m$

Cada uno de estos dos valores de p, dá origen a una solución particular de la ecuación, al ser sustituído en la fórmula de recurrencia que dá los coeficiente:

a) De la ecuación (3), sacamos después de poner $p=0$:

$$a_n = -\frac{(n+m)}{n(n+m-1)}\ a_{n-1}$$

y dando valores a n:

$$a_1 = -\frac{m+1}{m} a_o = \frac{m+1}{1!\,m} a_o$$

$$a_2 = \frac{m+2}{2(m+1)} a_1 = \frac{m+2}{2!\,m} a_o$$

$$a_3 = -\frac{m+3}{3(m+2)} a_2 = -\frac{m+3}{3!\,m} a_o$$

. . . . . .

La primera solución, resulta:

$$y_1 = a_o \left[1 - \frac{m+1}{1!\,m} x + \frac{m+2}{2!\,m} x^2 - \frac{m+3}{3!\,m} x^3 + \ldots \pm \ldots\right]$$

y poniendo $a'_o = m\, a_o$ se obtiene:

$$y_1 = a'_o \left[m - \frac{m+1}{1!} x + \frac{m+2}{2!} x^2 - \frac{m+3}{3!} x^3 + \ldots \pm \ldots\right]$$

Escribiremos esta ecuación en la forma:

$$y_1 = m\, a'_o \left(1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \ldots\right) - a' x \left(1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \ldots\right)$$

o sea:

$$y_1 = a'_o\ (m - x)\ .\ e^{-x}$$

b) Poniendo en seguida $p = 1 - m$ en la ecuación (3), y llamando ahora b_n al coeficiente de rango n:

$$n(1 - m + n)\, b_n + (n + 1)\, b_{n-1} = 0$$

de donde; $$bn = \frac{n+1}{n(m - n - 1)}\, b_{n-1}$$

siempre que m no sea un entero negativo.

Dando valores a n:

$$b_1 = \frac{2}{m - 2}\, b_o$$

$$b_2 = \frac{3}{2(m - 2)}\, b_1 = \frac{3}{(m - 3)(m - 2)}\, b_o$$

$$b_3 = \frac{4}{3(m - 4)}\, b^2 = \frac{4}{(m-4)(m-3)(m-2)}\, b_o$$

. . . . . .

Ahora, como la solución es:

$$\vec{y}_2 = x^{1-m} \sum_{o}^{\infty} b_n\, x^n$$

nos queda;

$$y_2 = b_o\, x^{1-m}\left[1 + \frac{2}{m - 2}x + \frac{3}{(m - 3(m - 2)}\, x^2 + \cdots + \right.$$

$$\left. + \frac{4}{(m - 4)(m - 3)(m - 2)}\, x^3 + \cdots\right]$$

y como ya hemos obtenido y_1, podemos escribir la solución general;

$$y = C_1\,(m - x)\, e^{-x} + C_a\, x^{1-m}\left[1 + \frac{2}{m - 2}\, x + \right.$$

$$+ \frac{3}{(m-3)(m-2)} x^2 + \ldots + \ldots \Big]$$

Este ejemplo, muestra en forma clara la generalidad del método, ya que procediendo directamente con la serie:

$$y = \sum_{0}^{\infty} a_n \; x^n$$

encontraríamos solamente la solución y_1 que como hemos visto, se obtiene del método que acabamos de emplear para el caso particular $p=0$.

Resolución de Ecuaciones con segundo miembro. Función Potencial.

Resolveremos la ecuación:

$$a(x)\, y'' + b(x)\, y' + c(x)\, y = r(x)$$

suponiendo su solución de la forma:

$$y = \sum_{0}^{\infty} a_n \; x^{p+n}$$

La resolución de esta ecuación como la de toda ecuación diferencial lineal de segundo orden con segundo miembro, se compone de dos procesos independientes:

a) Determinación de dos soluciones particulares $\bar{y}_1$ e $\bar{y}_2$, obtenidas anulando su segundo miembro.

b) Determinación de una solución particular $\bar{y}$, conservando el segundo miembro.

La primera parte del problema, ya ha sido tratada, y en cuanto a la segunda, es preciso decir que sólo en

ciertos casos tiene una solución fácil por medio de las series.

Nos ocuparemos del caso en que la función r(x) es de la forma:

$$r(x) = x^m$$

o bien $$r(x) = \Sigma x^m$$

que es fácil deducir del anterior.

El método consiste, como de costumbre, en la sustitución de $y = \sum_0^\infty a_n x^{p+n}$ en la ecuación diferencial, asimismo como sus derivadas: y' e y", seguida de un desdoblamiento de la suma resultante en dos partes: Su primer término y la suma restante. En esta situación, basta determinar a_o y p, de modo que: este primer término sea idéntico al segundo miembro, y que la suma restante sea nula.

Un ejemplo aclarará inmediatamente estos conceptos.

Aplicación: Resolver la ecuación:

$$y'' + \frac{2}{x} y' + m^2 \quad y = x^2$$

Dando forma entera:

$$x\,y'' + 2\,y' + m^2 \quad x\,y = x^3 \qquad (1)$$

Suponiendo: $$y' = \sum_0^\infty a_n \quad x^{p+n}$$

Obtenemos: $$y' = \sum_{0}^{\infty} (p+n)\, a_n\, x^{p+n-1}$$

e $$y'' = \sum_{0}^{\infty} (p+n)(p+n-1)\, a_n\, x^{p+n-2}$$

y sustituyendo en (1); no considerando, por el momento el segundo miembro:

$$\sum_{0}^{\infty} \Big[(p+n)(p+n-1)\, a_n\, x^{p+n-1} + 2(p+n)\, a_n\, x^{p+n-1} + m^2 a_n\, x^{p+n+1} \Big] = 0$$

que escribimos:

$$\sum_{0}^{\infty} \Big[(p+n)(p+n+1)\, a_n\, x^{p+n-1} + m^2\, a_n\, x^{p+n+1} \Big] = 0$$

Anulando en seguida el coeficiente de x^{p+n-1}:

$$(p+n)\,(p+n+1)\, a_n + m^2\, a_{n-2} = 0 \qquad (2)$$

y haciendo $n=0$, obtenemos:

$$p(p+1)\, a_0 = 0$$

y considerando $a_0 \neq 0$ encontramos que esta ecuación se verifica para $p=0$ y para $p=-1$.

La ecuación (2) dá para $n=1$:

$$(p+1)\,(p+2)\, a_1 = 0$$

de donde sacamos la posibilidad de hacer: $a_1 = 0$, de modo que la fórmula (2) escrita en la forma:

$$a_n = - \frac{m^2}{(p+n)(p+n+1)}\, a_{n-2}$$

determina los coeficientes pares del desarrollo, ya que por ser $a_1 = 0$ los de rango impar son también nulos.

Consideremos primero el caso $p = 0$. La fórmula queda:

$$a_n = \frac{m^2}{n(n+1)} \; a_{n-2}$$

y dando valores a n, a partir de $n=2$, tomando en cuenta sólo los valores pares:

$$a_2 = -\frac{m^2}{2 \cdot 3} \; a_o$$

$$a_4 = -\frac{m^2}{4 \cdot 5} \; a_2 = \frac{m^4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \; a_o$$

. . . . . .

Con esto, la primera parte de la solución queda:

$$y_1 = a_o \left[1 - \frac{m^2}{2.3} x^2 + \frac{m^4}{2.3.4.5} x^4 - \ldots \pm \ldots \right]$$

y amplificando por $m\,x$:

$$y_1 = \frac{a_o}{mx} \left[mx - \frac{(mx)^3}{3!} + \frac{(mx)^5}{5!} - \ldots \pm \ldots \right]$$

o sea:

$$y_1 = \frac{a'_o}{x} \; \text{sen}\, mx$$

En seguida, haciendo $p = -1$ en la fórmula de a_n, encontramos:

$$a_n = \frac{m^2}{n(n-1)}\, a_{n-2}$$

y considerando los valores pares de n a partir de n=2; cambiando a_n por b_n;

$$b_2 = -\frac{m^2}{1 \cdot 2}\, b_o$$

$$b_4 = -\frac{m^2}{3.4}\, b_2 = \frac{m^4}{1.2.3.4}\, b_o$$

de modo que se tiene;

$$y_2 = b_o\, x^{-1}\left[1 - \frac{m^2}{1.2}x^2 + \frac{m^4}{1.2.3.4}x^4 - \cdots \pm \cdots\right]$$

o sea; $y_2 = \frac{b_o}{x}\left[1 - \frac{(m\,x)^2}{2!} + \frac{(m\,x)^4}{4!} - \cdots \pm \cdots\right]$

que representa la función;

$$y_2 = \frac{b_o}{x}\cos m\,x$$

La solución general de la ecuación sin segundo miembro, nos queda;

$$y = C_1\ \frac{\cos m\,x}{x} + C_2\ \frac{\operatorname{sen} m\,x}{x}$$

y nos falta sólo el cálculo de la integral $\overline{y}$ de la ecuación con segundo miembro.

Reemplazando los valores de y, y' e y" en la

ecuación (1), obtenemos:

$$\sum_{0}^{\infty}\left[(p+n)(p+n+1)\, a_n\, x^{p+n-1} + m^2\, a_n\, x^{p+n+1}\right] = x^3$$

Desdoblaremos esta ecuación en la forma que lo hemos anunciado:

$$p(p+1)a_0\, x^{p-1} + \sum_{1}^{\infty}\left[(p+n)(p+n+1)a_n\, x^{p+n-1} + m^2\, a_n\, x^{p+n+1}\right] + m^2\, a_0\, x^{p+1} = x^3$$

Identifiquemos, en seguida, el primer término de esta ecuación, con el segundo miembro, es decir, hagamos:

$$p(p+1)\, a_0\, x^{p-1} = x^3$$

con lo cual, queda:

$$\sum_{1}^{\infty}\left[(p+n)(p+n+1)a_n\, x^{p+n-1} + m^2\, a_n\, x^{p+n+1} + m^2\, a_0\, x^{p+1}\right] = 0$$

Para que la primera ecuación se verifique:

$$p - 1 = 3$$

o sea:

$$p = 4$$

y

$$a_0 = \frac{1}{4 \cdot 5}$$

y en la segunda, anulando el coeficiente x^{p+n-1}:

$$(p+n)(p+n+1)a_n + m^2\, a_{n-2} = 0$$

y despejando a_n, teniendo en cuenta que $p = 4$:

$$a_n = -\frac{m^2}{(n+4)(n+5)}\, a_{n-2}$$

Para $n = 1$, resulta:

$$a_1 = 0$$

y con esto resultan nulos todos los términos impares. Entonces:

$$a_2 = -\frac{m^2}{6.7}\, a_0 = -\frac{m^2}{4.5.6.7}$$

$$a_4 = -\frac{m^2}{8,9}\, a_2 = \frac{m^4}{4.5.6.7.8.9}$$

. . . . . .

Nuestro desarrollo, queda entonces:

$$\bar{y} = x^4 \left[\frac{1}{4.5} - \frac{m^2}{4.5.6.7.}\, x^2 + \frac{m^4}{4.5.6.7.8.9.}\, x^4 - \ldots \pm \ldots\right]$$

Luego la solución final es:

$$y = C_1\ \frac{\cos mx}{x} + C_2 \frac{\operatorname{sen} mx}{x} + \frac{x^4}{20}\left[1 - \frac{(mx)^2}{6.7} + \frac{(mx)^4}{6.7.8.9} - \ldots \pm \ldots\right]$$

que el lector podrá expresar por medio de funciones clásicas.

Solución en desarrollo finito:

A menudo ocurre que, a partir de cierto rango, comienzan a hacerse nulos los coeficientes del desarrollo que constituye la solución de la ecuación diferencial que se trata de resolver.

Se comprende que en estos casos, la serie se convierte en un polinomio, lo cual constituye una simplificación del resultado.

Veremos un ejemplo, a continuación:

Aplicación: Resolver la ecuación:

$$(x - x^2)\, y'' + 3\, y' + 2\, y = 0$$

Reemplazando $y = \sum_0^\infty a_n\, x^{p+n}$

y sus derivadas en la ecuación, se encuentra:

$$\sum_0^\infty \Big[(x - x^2)(p+n)(p+n-1)a_n\, x^{p+n-2} + 3(p+n)a_n\, x^{p+n-1} + 2\, a_n\, x^{p+n}\Big] = 0$$

y ordenando:

$$\sum_0^\infty \Big[(p+n)(p+n+2)\, a_n\, x^{p+n-1} \,.\, (p+n-2)(p+n+1)\, a_n\, x^{p+n}\Big] = 0$$

Anulando el coeficiente de x^{p+n-1}:

$$(p+n)(p+n+2)a_n - (p+n-3)(p+n)a_{n-1} = 0 \qquad (1)$$

Poniendo n=0 en esta ecuación:

$$p(p+2)\, a_0 = 0$$

de donde sale:

a) $p=0$ o bien: b) $p=-2$ ya que suponemos $a_0 \neq 0$.

a) Para $p = 0$, la ecuación (1) dá:

$$n(n+2)a_n - (n-3)n\, a_{n-1} = 0$$

es decir:

$$a_n = \frac{n-3}{n+2}\, a_{n-1}$$

y dando valores a n:

$$a_1 = -\frac{2}{3}\, a_0$$

$$a_2 = -\frac{1}{4}\, a_1 = \frac{a_0}{6}$$

$$a_3 = 0$$

$$a_4 = 0$$

$$\cdots\cdots$$

o sea: $$y_1 = a_0 \left(1 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{6}x^2\right)$$

b) Poniendo en seguida $p=-2$ en (1):

$$(n-2)n\, b_n - (n-5)(n-2)\, b_{n-1} = 0$$

cambiendo a_n por b_n.

De aquí sale: $b_n = \frac{n-5}{n} b_{n-1}$ (n 2)

Hagamos n = 1: $b_1 = -4\ b_0$

y en seguida elijamos:

$$b_2 = -\frac{3}{2} b_1 = 6\ b_0$$

Luego dando valores a n, a partir de n = 3;

$$b_3 = -\frac{2}{3} b_2 = -4\ b_0$$

$$b_4 = -\frac{1}{4} b_3 = b_0$$

$$b_5 = 0$$

. . . .

de modo que:

$y_2 = b_0\ x^{-2}\ (1 - 4x + 6x^2 - 4x^3 + x^4) = b_0\ x^{-2}\ (x-1)^4$

y la solución general de la ecuación queda, con esto:

$$y = C_1(x^2 - 4x + 6) + C_2\ \frac{(x-1)^4}{x^2}$$

- oOo -

FUNCIONES DE BESSEL

Si nos proponemos resolver la ecuación:

$$y'' + \frac{1}{x} y' + (1 - \frac{m^2}{x^2})y = 0$$

nos encontramos ante el problema conocido en Matemáticas con el nombre de Ecuación de Bessel, que lleva este nombre en honor al astrónomo alemán que desarrolló su teoría, e hizo el primer estudio de funciones que de ella se deducen.

Para resolverla, hacemos notar que sus coeficientes no son desarrollables en serie de Mac-Laurin, por lo cual preferimos darle forma entera:

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - m^2)y = 0$$

Aplicaremos el método general estudiado en el capítulo de la pág. suponiendo que su solución sea de la forma:

$$y = \sum_{0}^{\infty} a_n x^{p+n}$$

Si esta serie, es derivable término a término:

$$y' = \sum_{0}^{\infty} (p+n)a_n \, x^{p+n-1}$$

e

$$y'' = \sum_{0}^{\infty} (p+n)(p+n-1)\, a_n \, x^{p+n-2}$$

Reemplazando estos valores en la ecuación de Bessel:

$$\sum_{0}^{\infty}\Big[(p+n)(p+n-1)a_n \, x^{p+n} + (p+n)a_n \, x^{p+n} - m^2 a_n \, x^{p+n} + a_n \, x^{p+n+2}\Big] = 0$$

que se puede escribir:

$$\sum_{0}^{\infty}\Big\{\Big[(p+n)^2 - m^2\Big] a_n \, x^{p+n} + a_n \, x^{p+n+2}\Big\} = 0$$

y anulando el coeficiente de x^{p+n} ya que todos los coeficientes de esta suma han de hacerlo separadamente:

$$\Big[(p+n)^2 - m^2\Big] a_n + a_{n-2} = 0$$

y dando valores à n:

$$(p^2 - m^2)a_o = 0$$

$$\Big[(p+1)^2 - m^2\Big] a_1 = 0 \qquad (1)$$

$$\Big[(p+2)^2 - m^2\Big] a_2 + a_o = 0$$

. . . . . .

$$\Big[(p+n)^2 - m^2\Big] a_n + a_{n-2} = 0$$

De la última de estas ecuaciones se saca:

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{(p+n)^2 - m^2} \qquad (2)$$

siempre que: $(p+n)^2 - m^2 \neq 0$

Antes de tratar el caso general, consideraremos algunos casos particulares.

a) Caso $m=0$.

Si $m = 0$ la primera de las ecuaciones (1) dá: $p = 0$, ya que supondremos $a_0 \neq 0$. La segunda ecuación dá $a_1 = 0$, con lo cual todos los términos de rango impar resultan nulos por contener a a_1 como factor.

La fórmula que dá a_n nos queda:

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{n^2}$$

Dando ahora valores a n:

$$a_2 = -\frac{a_0}{2^2} = -\frac{a_0}{2^2 \cdot 1!1!}$$

$$a_4 = -\frac{a_2}{4^2} = +\frac{a_0}{2^4 \cdot 2!2!}$$

$$a_6 = -\frac{a_4}{6^2} = -\frac{a_0}{2^6 \cdot 3!3!}$$

$$a_8 = -\frac{a_6}{8^2} = \frac{a_0}{2^8 \cdot 4!4!}$$

. . . . . .

$$a_{2n} = -\frac{a_{2n-2}}{n^2} = (-1)^n \frac{a_0}{2^{2n}\, n!n!}$$

Luego la solución resulta:

$$y = a_o \left[1 - \frac{1}{1!1!}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{2!2!}\left(\frac{x}{2}\right)^4 - \frac{1}{3!3!}\left(\frac{x}{2}\right)^6 \pm \ldots + \frac{(-1)^n}{n!n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n} \pm \ldots\right]$$

y dando a a_o el valor uno se obtiene la serie que designamos:

$$J_o(x) = 1 - \frac{1}{1!1!}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{2!2!}\left(\frac{x}{2}\right)^4 - \frac{1}{3!3!}\left(\frac{x}{2}\right)^6 \pm \ldots + \frac{(-1)^n}{n!n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n} \pm \ldots$$

o bien:

$$J_o(x) = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{n!n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n} \qquad (3)$$

Esta serie es convergente para todo valor de x, por lo tanto puede ser derivada o integrada término a término. Se la designa con el nombre de Función de Bessel de orden cero y de primera especie.

Volveremos luego, sobre esta función, y la relacionaremos con las de orden superior, después de tratar el caso general de la Ecuación de Bessel.

b) Caso $m = \frac{1}{2}$:

En virtud de la primera de las ecuaciones (1), y para que a_o no se anule, ha de verificarse:

$$p^2 = m^2$$

o sea, en el caso presente,

$$p^2 = \frac{1}{4}$$

que dá:

$$p = \pm \frac{1}{2}$$

Elegiremos el valor $p=-\frac{1}{2}$ de modo que también se verifique la segunda de las ecuaciones (1) sin que a_1 sea nulo. Con esto el término general queda:

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{n(n-1)}$$

y dando valores a n:

$$a_2 = -\frac{a_0}{2 \cdot 1} = -\frac{a_0}{2!}$$

$$a_3 = -\frac{a_1}{3 \cdot 2} = -\frac{a_1}{3!}$$

$$a_4 = -\frac{a_2}{4 \cdot 3} = \frac{a_1}{4!}$$

$$a_5 = -\frac{a_3}{5 \cdot 4} = \frac{a_1}{5!}$$

Como la solución era de la forma:

$$y = \sum_0^\infty a_n x^{p+n}$$

resulta:

$$y = \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_0^\infty a_n x^n$$

ya que

$$p = -\frac{1}{2}$$

Desarrollando esta suma y reemplazando los coeficientes se obtiene:

$$y = \frac{a_o}{\sqrt{x}}\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \mp \ldots\right) + \frac{a_1}{\sqrt{x}}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \mp \ldots\right)$$

o sea:

$$y = \frac{a_o \cos x + a_1 \operatorname{sen} x}{\sqrt{x}} \qquad (4)$$

que constituye la solución general de este caso, ya que contiene dos constantes arbitrarias. Por ser general incluye en sí el caso $p = +\frac{1}{2}$ que pudiera creerse interesante, y que se deduce de él, poniendo $a_o = 0$.

c) Caso general: m entero: La Función de primera especie y de orden m. La primera de las ecuaciones (1), pág., 208 nos dá:

$$a_o (p^2 - m^2) = 0$$

si queremos que a_o no sea nulo elegimos $p = \pm m$ con lo cual la segunda de dichas ecuaciones dá:

$$a_1(2p + 1) = 0$$

Esto muestra que $a_1 = 0$ por ser:

$$(2p + 1) \neq 0 \ .$$

en virtud de que suponemos que m, es entero.

Escribimos en seguida el término general:

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{(p+n)^2 - m^2}$$

y observamos que en virtud de que $a_1 = 0$ resultan nulos todos los coeficientes de rango impar. El desarrollo en serie contendrá por tanto sólo terminos de rango par y para obtener sus coeficientes deberíamos dar a n los valores sucesivos; $n = 2, 4, 6, \ldots 2n$. Para evitar esto, cambiamos en la fórmula de a_n, n por $2n$ y damos entonces los valores de la serie natural.

Nos queda:

$$a_{2n} = -\frac{a_{2n-2}}{(p+2n)^2 - m^2}$$

pero como $p^2 = m^2$ resulta:

$$a_{2n} = -\frac{a_{2n-2}}{4n(p+n)}$$

Consideraremos por ahora solamente el caso $p \neq m$ de modo que la fórmula queda:

$$a_{2n} = -\frac{a_{2n-2}}{2^2\, n(m+n)}$$

Dando valores a n;

$$a_2 = -\frac{a_o}{2^2 \cdot 1(m+1)}$$

$$a_4 = -\frac{a_2}{2^2 \cdot 2(m+2)} = \frac{a_o}{2^4 \cdot 1 \cdot 2(m+1)(m+2)}$$

$$a_6 = -\frac{a_4}{2^2 \cdot 3(m+3)} = -\frac{a_o}{2^6 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3(m+1)(m+2)(m+3)}$$

. . . . . .

luego el término de rango n resulta:

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n a_o}{2^{2n}\, n!(m+1)(m+2)(m+3)\ldots(m+n)}$$

Como a_o es una constante arbitraria, podemos asignarle cualquier valor. Hagamos, por ejemplo:

$$a_o = \frac{1}{2^m\, m!}$$

Con esto, nos queda:

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n}{2^{2n+m}\, n!m!(m+1)(m+2)\ldots(m+n)}$$

y por último $$a_{2n} = \frac{(-1)^n}{2^{m+2n}\, n!(m+n)!} \qquad (5)$$

Ahora dando valores a n; obtenemos la serie que designamos $J_m(x)$:

$$J_m(x) = \frac{1}{0!m!}\left(\frac{x}{2}\right)^m - \frac{1}{1!(m+1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{m+2} +$$

$$+ \frac{1}{2!(m+2)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{m+4} \pm \ldots + \frac{(-1)^n}{n!(m+n)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{m+2n} \ldots$$

que también se escribe:

$$J_m(x)=\sum_{0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(m+n)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{m+2n} \qquad (6)$$

Esta serie es también una serie convergente para todo valor de x, por lo tanto es integrable y derivable término a término. Se la llama Función de Bessel de orden m y de primera especie, dándole este último calificativo en razon de ser la primera de las soluciones particulares de la ecuación de Bessel, que hemos logrado obtener. Puede notarse que $J_m(0) = 0$ siempre que $m \neq 0$.

Función de orden cero: Si en las fórmulas (6) hacemos m = 0 tendremos:

$$J_o(x) = 1 - \frac{1}{1!1!}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{2!2!}\left(\frac{x}{2}\right)^4 \pm \ldots + \frac{(-1)^n}{n!n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n} \ldots$$

o bien:

$$J_o(x) = \sum_{0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$

Se obtienen así los mismos valores encontrados directamente en (3).

Se puede notar que para x=0 se obtiene: $J_o(0) = 1$.

Función de Primer Orden: Si hacemos m =1 en las fórmulas (6) tendremos:

$$J_1(x) = \frac{1}{0!1!}\frac{x}{2} - \frac{1}{1!2!}\left(\frac{x}{2}\right)^3 + \frac{1}{2!3!}\left(\frac{x}{2}\right)^5 \pm \ldots \frac{(-1)^n}{n!(n+1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1} \ldots$$

o bien:

$$J_1(x) = \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}$$

Relacionaremos ahora $J_1(x)$ con $J_o(x)$;

Derivando $J_o(x)$ del párrafo anterior, obtenemos;

$$J_o'(x) = -\frac{1}{0!1!}\frac{x}{2} + \frac{1}{1!2!}\left(\frac{x}{2}\right)^3 - \frac{1}{2!3!}\left(\frac{x}{2}\right)^5 \pm \cdots$$

$$\cdots + \frac{(-1)^n}{(n-1)!n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n-1} + \frac{(-1)^{n+1}}{n!(n+1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1} \cdots\cdots$$

pero escribiendo en la forma;

$$J_o'(x) = -\frac{1}{0!1!}\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{1!2!}\left(\frac{x}{2}\right)^3 \pm \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n!(n+1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n\,1}$$

se puede ver que; $\boxed{J_o'(x) = -J_1(x)}$ (7)

Podemos, ahora, encontrar otra relación entre estas funciones, de la siguiente manera;

Multiplicando $J_1(x)$ por $\frac{x}{2}$;

$$\frac{x}{2} J_1(x) = \frac{1}{0!1!}\left(\frac{x}{2}\right)^2 - \frac{1}{1!2!}\left(\frac{x}{2}\right)^4 \pm \cdots + \frac{(-1)^n}{n!(n+1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+2} \cdots$$

y derivando;

$$\left[\frac{x}{2} J_1(x)\right]' = \frac{1}{0!1!}\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{1!1!}\left(\frac{x}{2}\right)^3 + \frac{1}{2!2!}\left(\frac{x}{2}\right)^5 \pm \cdots + \frac{(-1)^n}{n!n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}$$

Comparando esta ecuación con $J_o(x)$ después de factorizar $\frac{x}{2}$:

$$\left[\frac{x}{2}J_1(x)\right]' = \frac{x}{2}J_o(x)$$

o bien:

$$\left[xJ_1(x)\right]' = x\,J_o(x)$$

que también se puede escribir:

$$\boxed{J_1'(x) = J_o(x) - \frac{1}{x}J_1(x)} \qquad (8)$$

Calcularemos por último $J_1''(x)$ para lo cual escribiremos la ecuación:

$$J_1''(x) + \frac{1}{x}J_1'(x) + \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)J_1(x) = 0$$

que corresponde al caso m = 1.

Despejando $J_1''(x)$, obtenemos directamente:

$$\boxed{J_1''(x) = \frac{1 - x^2}{x^2}J_1(x) - \frac{1}{x}J_1'(x)} \qquad (8')$$

Relaciones entre las funciones de distintos órdenes. Formulas de recurrencia:

Relacionaremos primeramente $J_m(x)$ con $J_{m-1}(x)$:

Para ello multiplicamos $J_m(x)$ por x^m:

$$x^m J_m(x) = \frac{1}{m!}\,\frac{x^{2m}}{2^m} - \frac{1}{1!(m+1)!}\,\frac{x^{2m+2}}{2^{m+2}} +$$

$$+ \frac{1}{2!(m+2)!}\,\frac{x^{2m+4}}{2^{m+4}} \pm \ldots + \frac{(-1)^n}{n!(m+n)!}\,\frac{x^{2m+2n}}{2^{m+2n}} \ldots\ldots$$

y derivando con respecto a x:

$$\left[x^m J_m(x)\right]' = \frac{1}{(m-1)} \frac{x^{2m-1}}{2^{m-1}} - \frac{1}{1!m!} x^{2m+1}$$

$$+ \frac{1}{2!(m+1)!} \frac{x^{2m+3}}{2^{m+3}} \pm \ldots + \frac{(-1)^n}{n!(m+n-1)!} \frac{x^{2m+2n-1}}{2^{m+2n-1}}$$

Sacando factor común x^m:

$$\left[x^m J_m(x)\right]' = x^m \left[\frac{1}{0!(m-1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{m-1} - \frac{1}{1!m!}\left(\frac{x}{2}\right)^{m+1} \pm \right.$$

$$\left. \pm \ldots + \frac{(-1)^n}{n!(m-1+n)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{m-1+2n} \ldots\right]$$

y comparando esta serie con $J_m(x)$:

$$\boxed{\left[x^m J_m(x)\right]' = x^m J_{m-1}(x)} \qquad (9)$$

Relacionaremos en seguida $J_m(x)$ con $J_{m+1}(x)$, multiplicando $J_m(x)$ por x^{-m}:

$$x^{-m} J_m(x) = \frac{1}{m!2^m} \frac{1}{1!(m+1)!} \frac{x^2}{2^{m+2}} + \frac{1}{2!(m+2)!} \frac{x^4}{2^{m+4}} \pm$$

$$\pm \ldots + \frac{(-1)^n}{n!(m+n)!} \frac{x^{2n}}{2^{m+2n}}$$

Ahora derivando esta ecuación:

$$\left[x^{-m} J_m(x)\right]' = -\frac{1}{1!(m+1)!} \frac{x}{2^{m+1}} + \frac{1}{1!(m+2)!} \frac{x^3}{2^{m+3}} \pm$$

$$\pm \ldots\ldots \mp \frac{1}{(n-1)!\,(m+n)!} \quad \frac{x^{2n-1}}{2^{m-1+2n}}$$

y amplificando por x^{-m} en el segundo miembro:

$$\left[x^{-m} J_m(x)\right]' = -x^{-m} \left[\frac{1}{0!\,(m+1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{m+1} \frac{1}{1!(m+2)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{m+3} \pm\right.$$

$$\left.\pm \ldots \pm \frac{1}{(n-1)!\,(m+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{m-1+2n} \frac{1}{n!(m+n+1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{m+1+2n} \ldots\right.$$

luego finalmente:

$$\boxed{\left[x^{-m} J_m(x)\right]' = -x^{-m} J_{m+1}(x)} \qquad (10)$$

Desarrollando ahora la fórmula (9):

$$m\, x^{m-1} J_m(x) + x^m J_m'(x) = x^m J_{m-1}(x)$$

se obtiene: $$J_m'(x) + \frac{m}{x} J_m(x) - J_{m-1}(x) = 0 \qquad (11)$$

Desarrollando en seguida (10):

$$-m\, x^{-m-1} J_m(x) + x^{-m} J_m'(x) = -x^{-m} J_{m+1}(x)$$

y multiplicando por x^m y ordenando:

$$J_m'(x) - \frac{m}{x} J_m(x) + J_{m+1}(x) = 0 \qquad (12)$$

Ahora bien: Las fórmulas (11) y (12) forman un sistema que por suma y resta da:

$$2 J_m'(x) = J_{m-1}(x) - J_{m+1}(x) \qquad (13)$$

$$\frac{2m}{x} J_m(x) = J_{m-1}(x) + J_{m+1}(x) \qquad (14)$$

Estas fórmulas relacionan 3 Funciones de órdenes sucesivos y muestran que conociendo $J_0(x)$ y $J_1(x)$ se puede calcular la función de un orden cualquiera por aplicación reiterada de ellas. Más adelante haremos algunas aplicaciones que muestren la utilidad de las relaciones deducidas.

Vemos aún que si en la fórmula (10) hacemos $m=0$, y en (11) $m=1$ obtenemos:

$$J_0'(x) = - J_1(x)$$

$$J_1'(x) = J_0(x) - \frac{1}{x} J_1(x)$$

o sea encontramos las fórmulas deducidas anteriormente que prueban la generalidad de los resultados obtenidos, en este párrafo.

Integrales de Bessel:

Hemos encontrado en el párrafo anterior, fórmulas diferenciales de las funciones de Bessel. Se comprende que cada una de éstas puede dar origen a otra que de ella puede deducirse por una simple integración.

Se dedujo en (9) y (10):

$$x^m J_{m-1}(x) = \left[x_m J_m(x)\right]'$$

$$x^{-m} J_{m+1}(x) = \left[-x^{-m} \omega J_m(x)\right]'$$

e integrando estas ecuaciones:

$$\boxed{\begin{aligned} \int x^m J_{m-1}(x)\,dx &= x^m J_m(x) \\ \int x^{-m} J_{m+1}(x)\,dx &= -x^{-m} J_m(x) \end{aligned}} \qquad (15)$$

Si las integrales son definidas, por ejemplo, entre 0 y a:

$$\int_0^a x^m J_{m-1}(x)\ dx = a^m J_m(a)$$

$$\int_0^a x^{-m} J_{m+1}(x)\ dx = -a^{-m} J_m(a) \qquad (16).$$

Si $J_m(a) = 0$ resulta:

$$\int_0^a x^m J_{m-1}(x)\ dx = 0$$

$$\int_0^a x^{-m} J_{m+1}(x)\ dx = 0$$

Un caso que a menudo se presenta es aquel en que $m = 1$.

La primera de las integrales definidas dá para este valor de m:

$$\int_0^a x\ J_0(x)\ dx = a\ J_1(a)$$

y si $J_1(a) = 0$

$$\int_0^a x\ J_0(x)\ dx = 0$$

Aplicaciones: a) Calcular la integral:

$$\int_0^a x^3 J_0(x)\ dx$$

Escribamos:

$$\int_0^a x^3 \, J_0(x) \, dx = \int_0^a x^2 \left[x \, J_0(x) \right] dx = \int_0^a x^2 \left[x \, J_1(x) \right]' \, dx$$

en virtud de que: $x \, J_0(x) = \left[x \, J_1(x) \right]'$

Integrando por partes:

$$\int_0^a x^3 \, J_0(x) \, dx = \left[x^2 \cdot x \, J_1(x) \right]_0^a - 2 \int_0^a x^2 \, J_1(x) \, dx$$

Esta última integral la obtenemos de (16) haciendo $m = 2$ y vale:

$$\int_0^a x^2 \, J_1(x) \, dx = a^2 \, J_2(a)$$

luego:

$$\int_0^a x^3 \, J_0(x) \, dx = a^3 \, J_1(a) - 2 \, a^2 \, J_2(a)$$

Expresaremos este resultado en función de $J_0(a)$ y $J_1(a)$; Para ello la fórmula (14) nos dá:

$$J_{m+1}(x) = \frac{2m}{x} J_m(x) - J_{m-1}(x)$$

y haciendo $m = 1$ y $x = a$,

$$J_2(a) = \frac{2}{a} J_1(a) - J_0(a)$$

y sustituyendo este valor en la integral:

$$\int_0^a x^3 \, J_0(x) \, dx = a^3 J_1(a) - 2a^2 \left[\frac{2}{a} J_1(a) - J_0(a) \right]$$

de donde;

$$\int_0^a x^3 \, J_0(x) \, dx = a(a^2 - 4) \, J_1(a) + 2a^2 \, J_0(a)$$

b) Calcular la integral;

$$\int \frac{1 - x^2}{x} \, J_1(x) \, dx$$

Para ello, despejemos en la fórmula (9'), pág.218.)

$$\frac{1 - x^2}{x^2} J_1(x) = \frac{1}{x} J_1'(x) + J_1''(x)$$

y multiplicando por x;

$$\frac{1 - x^2}{x} J_1(x) = J_1'(x) + x J_1''(x)$$

que escribimos;

$$\frac{1 - x^2}{x} J_1(x) = \frac{d}{dx} \left[x J_1'(x) \right]$$

y multiplicando por dx, e integrando;

$$\int \frac{1 - x^2}{x} J_1(x) \, dx = x J_1'(x)$$

Pero, según la fórmula (8);

$$x\,J_1'(x) = x\,J_0(x) - J_1(x)$$

de modo que;

$$\int \frac{1 - x^2}{x} J_1(x)\,dx = x\,J_0(x) - J_1(x)$$

Aplicación de la Función Gamma a la Función de Bessel de primera especie;

Hasta ahora, hemos definido la función de Bessel de orden m y de primera especie por medio de la ecuación.

$$J_m(x) = \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(m+n)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{m+2n}$$

Hemos supuesto, a lo largo de nuestras deducciones, que el número m, es entero; si recordamos la relación entre los factoriales y la Función Gamma, que estaba expresada por;

$$\Gamma(m+1) = m! \qquad (1)$$

podremos escribir la función $J_m(x)$, en la forma;

$$\boxed{J_m(x) = \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(m+n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{m+2n}} \qquad (2)$$

ya que si cambiamos m por (m+ n) en la ecuación (1), obtenemos;

$$(m+n)! = \Gamma(m+n+1)$$

Recordando, además, que la función Gamma, sirve como definición, a los factoriales de números fraccionarios, deducimos que la fórmula (2), generaliza la función de Bessel de orden $\underline{m}$, a órdenes también fraccionarios.

Debemos averiguar, en seguida, si las fórmulas de recurrencia que hemos obtenido, en la hipótesis de $\underline{m}$ entero, son también válidas, para $\underline{m}$ fraccionario.

Derivando la ecuación (2) con respecto a $\underline{x}$, y luego multiplicando por x:

$$x\, J'_m(x) = \sum_{o}^{\infty} \frac{(-1)^n\,(m+2n)}{n!\,\Gamma(m+n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{m+2n} \qquad (3)$$

y como podemos sacar $\underline{m}$, que es constante, fuera del signo Suma:

$$x\, J'_m(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(m+n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{m+2n} +$$

$$+ x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n-1)!\,\Gamma(m+n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{m+2n-1}$$

Observemos, que la primera suma es, justamente, $J_m(x)$ y en la segunda, hagamos $n=k+1$ y sumemos con respecto a $\underline{k}$, entre los límites correspondientes.

$$x\, J'_m(x) = m\, J_m(x) - x \sum_{k=o}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(m+k+2)} \left(\frac{x}{2}\right)^{m+1+2k}$$

y así podemos reconocer, en esta suma, a la función: $J_{m+1}(x)$ de modo que:

$$x\, J'_m(x) = m\, J_m(x) - x\, J_{m+1}(x)$$

o sea:

$$J'_m(x) - \frac{m}{x} J_m(x) + J_{m+1}(x) = 0 \qquad (4)$$

Poniendo ahora:

$$m + 2n = 2(m + n) - m$$

y reemplazando en (3):

$$x\, J'_m(x) = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (m+n)}{n!\ \Gamma(m+n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{m-1+2n}$$

$$- m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\ \Gamma(m+n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{m+2n}$$

En la primera suma, simplificaremos por $(m+n)$, y teniendo en cuenta que la segunda es justamente $J_m(x)$:

$$x\, J'_m(x) = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\ \Gamma(m+n)} \left(\frac{x}{2}\right)^{m-1+2n} - m\, J_m(x)$$

que resulta finalmente:

$$x\, J'_m(x) = x\, J_{m-1}(x) - m\, J_m(x)$$

y dividiendo por x:

$$J'_m(x) + \frac{m}{x} J_m(x) - J_{m-1}(x) = 0 \qquad (5)$$

Las fórmulas (4) y (5) son idénticas, respectivamente, a las fórmulas (12) y (11) de pág. 219, por lo cual deducimos que también las fórmulas (13), (14) y (15), como asimismo, todas las que, de éstas puedan deducirse, son aplicables, también, cuando m toma valores fraccionarios.

Aplicaciones: a) Calcular $J_{\frac{1}{2}}(x)$

Haciendo $n = \frac{1}{2}$ en la fórmula general se tiene:

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+\frac{3}{2})} \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}+2n}$$

que puede escribirse:

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{x}{2}} \sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+\frac{3}{2})} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$

y desarrollando la suma:

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{x}{2}} \left[\frac{1}{\Gamma(\frac{3}{2})} - \frac{1}{1\,.\,\Gamma(\frac{5}{2})}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{1\,.\,2\,\Gamma(\frac{7}{2})}\left(\frac{x}{2}\right)^4 + \cdots \right]$$

Ahora: $\Gamma(n) = (n-1)\,\Gamma(n-1)$

luego: $\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}\,\Gamma(\frac{1}{2})$

$$\Gamma(\frac{5}{2}) = \frac{3}{2}\;\frac{1}{2}\,\Gamma(\frac{1}{2})$$

$$\Gamma(\frac{7}{2}) = \frac{5}{2}\;\frac{3}{2}\;\frac{1}{2}\,\Gamma(\frac{1}{2})$$

Reemplazando estos valores en el desarrollo, teniendo en cuenta que $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ y luego reduciendo se llega finalmente a:

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \cdots \pm \cdots\right)$$

y por último; $\quad -J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \operatorname{sen} x$

que resulta como se vé en términos finitos, y de acuerdo co resultados anteriores;

b) Calcular $J_{\frac{1}{2}}(x)$

De la fórmula

$$\left[x^m J_m(x)\right]' = x^m J_{m-1}(x)$$

se deduce, haciendo $m = \frac{1}{2}$;

$$\left[\sqrt{x}\, J_{\frac{1}{2}}(x)\right]' = \sqrt{x}\, J_{\frac{1}{2}}(x)$$

pero del resultado del problema anterior, se saca;

$$\sqrt{x}\, J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{sen} x$$

o sea; $\quad J_{\frac{1}{2}}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi x}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} (\operatorname{sen} x)'$

y efectuando la derivación, se encuentra;

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x$$

c) Calcular $J_{\frac{3}{2}}(x)$

De la fórmula:

$$\frac{2m}{x} J_m(x) = J_{m-1}(x) + J_{m+1}(x)$$

se deduce, poniendo $m = \frac{1}{2}$:

$$J_{\frac{3}{2}}(x) = \frac{1}{x} J_{1/2}(x) - J_{-\frac{1}{2}}(x)$$

y reemplazando en esta ecuación los resultados obtenidos en los dos problemas anteriores:

$$J_{\frac{3}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} - \cos x \right)$$

Como se puede ver, a partir de estos valores encontrados se puede calcular por medio de las fórmulas de recurrencia obtenidas, la función de cualquier orden múltiplo de 1/2 en términos finitos.

Veremos más adelante, como para valores debidamente grandes de x, puede expresarse $J_m(x)$, aproximadamente en la misma forma que las anteriores.

La solución general de la ecuación de Bessel:

Al definir la función $J_m(x)$ le dimos el nombre de función de primera especie, por ser proporcionada por la primera de las dos soluciones particulares de la ecuación de Bessel.

Si volvemos ahora a la pág. 210 caso b), podemos ver que la solución general de la ecuación de Bessel para el caso en que m=1/2 está dada por:

$$y = \frac{a_o \cos x + a_1 \operatorname{sen} x}{\sqrt{x}} \qquad (1)$$

Ahora, en las aplicaciones que acabemos de hacer hemos demostrado que:

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \operatorname{sen} x$$

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x$$

de donde:

$$\frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} J_{\frac{1}{2}}(x)$$

$$\frac{\cos x}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} J_{\frac{1}{2}}(x)$$

y llevando estos valores a(1):

$$\boxed{y = A\, J_{\frac{1}{2}}(x) + B\, J_{\frac{1}{2}}(x)}$$

Esta es la solución general de la ecuación expresada por medio de funciones de Bessel. Si calculamos funciones de otros órdenes pero siempre fraccionarios, llegaremos a que siempre en dichos casos:

$$y = A\, J_m(x) + B\, J_{-m}(x)$$

constituye la solución general de la ecuación de Bessel.

Ahora, cuando m es entero, resulta que

$$J_m(x) = (-1)^m J_{-m}(x)$$

o sea, las dos soluciones particulares de la ecuación, resultan linealmente dependientes, de modo que se pierde una solución de la ecuación de Bessel.

Para encontrarla, en este caso, podemos aplicar la fórmula general deducida en el Capítulo de pag. que expresa la solución particular y_2 de una ecuación diferencial en términos de $\overline{y}_1$.

La relación encontrada era:

$$\overline{y}_2 = \overline{y}_1 \int \frac{e^{-\int A(x)dx}\, dx}{\overline{y}_1^2}$$

Aplicando esta fórmula a la ecuación de Bessel:

$$y'' + \frac{1}{x}y' + (1 - \frac{m^2}{m^2})y = 0$$

en la cual $A(x) = \frac{1}{x}$

y teniendo en cuenta que:

$$\overline{y}_1 = J_m(x)$$

se tiene: $$\overline{y}_2 = J_m(x) \int \frac{e^{-\ln x}\, dx}{J_m^2(x)}$$

o sea: $$\overline{y}_2 = J_m(x) \int \frac{dx}{x\, J_m^2(x)}$$

Se define, entonces, una de las integrales:

$$Y_m(x) = B\, J_m(x) \int \frac{dx}{x\, J_m^2(x)} + C$$

como la función de Bessel de orden m y de Segunda especie.

Esta forma integral de la función de Segunda especie es incómoda en la práctica, por lo cual se ha tratado de darle la forma de una serie de potencias, para expresarla análogamente a $J_m(x)$.

Haremos esta deducción para el caso en que $m=0$.

La ecuación de Bessel en este caso es:

$$y'' + \frac{1}{x}y' + y = 0$$

Como $Y_o(x)$ es una solución de ella:

$$Y_o''(x) + \frac{1}{x} Y_o'(x) + Y_o(x) = 0$$

Supongamos ahora que u y z son funciones de x que trataremos de determinar y hagamos entonces:

$$\left.\begin{array}{l} Y_o(x) = u\, J_o(x) + z \qquad \text{de modo que:} \\ Y_o'(x) = u' J_o(x) + u\, J_o'(x) + z' \\ Y_o''(x) = u'' J_o(x) + 2\, u'\, J_o'(x) + u\, J_o''(x) + z'' \end{array}\right| \quad \frac{1}{x}$$

Multiplicando la segunda por $\frac{1}{x}$ y sumando las tres ecuaciones:

$$\left[J_o''(x) + \frac{1}{x}\, J_o'(x) + J_o(x)\right] u + \left(u'' + \frac{1}{x}\, u'\right) J_o(x) +$$

$$+ 2\, u'\, J_o'(x) + z'' + \frac{1}{x}\, z' + z = 0$$

pero como el corchete es nulo ya que $J_o(x)$ también satisface la ecuación de Bessel, nos queda:

$$(u'' + \frac{1}{x} u') J_o(x) + 2 u' J_o'(x) + z'' + \frac{1}{x} z' + z = 0$$

Como podemos determinar una de las dos funciones introducidas libremente, elijamos u de modo que:

$$u'' + \frac{1}{x} u' = 0$$

Esta ecuación puede escribirse:

$$\frac{du'}{u'} + \frac{dx}{x} = 0$$

e integrando: $\ln |u'x| = \ln B$

de modo que: $u' = \frac{B}{x}$

Multiplicando por dx e integrando nuevamente:

$$u = B \ln x + C$$

Daremos a C el valor Cero, y a B valor unitario, de modo que la ecuación diferencial queda:

$$\frac{2}{x} J_o'(x) + z'' + \frac{1}{x} z' + z = 0$$

Para integrar esta ecuación, procederemos por medio de desarrollo en serie, suponiendo que z sea de la forma:

$$z = \sum_{o}^{\infty} a_{2n} x^{2n}$$

ya que sabemos que:

$$J_o(x) = \sum_o^\infty \frac{(-1)^n}{n!n!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$

Calculando z' y z" y reemplazando en la ecuación diferencial,

$$\sum_o^\infty \left[2n(2n-1)a_{2n} x^{2n-2} + 2n\, a_{2n} x^{2n-2} + a_{2n} x^{2n} + \right.$$

$$\left. + (-1)^n \frac{2 \cdot 2n\, x^{2n-2}}{2^{2n}\, n!n!} \right] = 0$$

y reduciendo:

$$\sum_o^\infty \left[(2n)^2 a_{2n} + \frac{4n\,(-1)^n}{2^{2n}\, n!n!} x^{2n-2} + a_{2n} x^{2n} \right] = 0$$

Anulando, como de costumbre, el coeficiente de x^{2n-2}, se tiene:

$$a_{2n} = -\frac{a_{2n-2}}{(2n)^2} - \frac{(-1)^n}{2^{2n}\, n!n!n}$$

que escribimos:

$$a_{2n} = -\frac{a_{2n-2}}{(2n)^2} + \frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n}\, n!n!n}$$

y cambiando sucesivamente n por n+1:

$$a_{2n-2} = \frac{a_{2n-4}}{2^2\,(n-1)^2} + \frac{(-1)^n}{2^{2(n-1)}(n-1)!(n-1)!(n-1)}$$

$$a_{2n-4} = -\frac{a_{2n-6}}{2^2(n-2)^2} + \frac{(-1)^{n-1}}{2^{2(n-2)}(n-2)!(n-2)!(n-2)}$$

. . . . . .

etc.

Eliminando ahora a_{2n-2}, a_{2n-4}, a_{2n-6} ... se llega finalmente después de hacer reducciones a;

$$a_{2n} = \frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n}\, n!n!}\left[\frac{1}{n} + \frac{1}{1-1} + \frac{1}{n-2} + \cdots + \frac{1}{2} + 1\right]$$

$$a_{2n} = \frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n}\, n!n!} \sum_{1}^{n} \frac{1}{k}$$

y como hemos supuesto:

$$z = \sum_{o}^{\infty} a_{2n}\, x^{2n}$$

obtenemos; $$z = \sum_{o}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!\, n!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} \sum_{1}^{n} \frac{1}{k}$$

Ahora como: $$Y_o(x) = u\, J_o(x) + z$$

en que: $$u = \ln x$$

encontramos finalmente:

$$Y_o(x) = J_o(x) \ln x + \sum_{o}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!\, n!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} \sum_{1}^{n} \frac{1}{k}$$

y desarrollando:

$$Y_o(x) = J_o(x) \ln x + \frac{1}{1.1!}\left(\frac{x}{2}\right)^2 - \frac{1}{2!2!}\left(\frac{x}{2}\right)^4 \left(1 + \frac{1}{2}\right) +$$

$$+ \frac{1}{3!3!}\left(\frac{x}{2}\right)^6 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \pm \cdots$$

Esta es la expresión de $Y_o(x)$ que buscamos, y que presenta la particularidad de hacerse infinitamente grande y negativa, para el valor $x = 0$.

Efectivamente, siendo $J_o(x) = 0$ para $x \neq 0$, se tiene:

$$Y_o(0) = -\infty$$

a causa de la aexistencia de un Logaritmo, que tiene esta misma propiedad.

Volviendo a la función $Y_m(x)$, debemos decir, que ésta debe su nombre al hecho de ser la segunda solución particular de la ecuación de Bessel, que hasta el momento hemos logrado obtener. Como en otro capítulo, lo hemos dicho, estas dos soluciones; $J_m(x)$ e $Y_m(x)$, son suficientes para dar la expresión de la solución general de la ecuación de Bessel, que toma la forma:

$$y = C_1 J_m(x) + C_2 Y_m(x)$$

Gran parte de las funciones de Segunda Especie, no han sido aún definidas, especialmente las de orden superior.

Diremos, de paso, que las fórmulas de recurrencia obtenidas para $J_m(x)$, así como las fórmulas diferenciales e integrales, que hemos encontrado en párrafos anteriores, son también válidas para la función de Segunda Especie $Y_m(x)$.

Representación gráfica de Funciones de Bessel.

Su analogía con las Funciones Trigonométricas:

Si llevamos las funciones de Bessel, a ejes coordenados, encontramos, que su representación gráfica, en general, se asemeja bastante, a la de las funciones sinusoidales.

Al igual que éstas últimas, aquellas oscilan

constantemente entre valores positivos y negativos, pero disminuyen su amplitud a medida que crece su variable x, debiendo este amortiguamiento, a la presencia de un factor $\frac{1}{\sqrt{x}}$ que en ellas interviene, como lo observaremos más adelante.

Si $J_m(x)$ cambia alternativamente de signo, deberá anularse para una gran cantidad de valores de x, que llamaremos raíces de la función de Bessel de orden m, siendo en rigor, las raíces de la ecuación.

$$J_m(x) = 0$$

Entre dos raíces consecutivas de $J_m(x)$, existen siempre una raíz de $J_{m-1}(x)$ y otra de $J_{m+1}(x)$. En efecto, si $J_m(x)$ se anula para $x=x_1$ y $x=x_2$, siendo x_1 y x_2 raíces consecutivas, también se anularán, para estos valores de x, las funciones: $x^m J_m(x)$, y $x^{-m} J_m(x)$; según el Teorema de Rolle, las derivadas de estas funciones, deberán entonces, anularse para un valor $x = x$ comprendido entre x_1 y x_2.

Pero hemos demostrado que:

$$\left[x^m \; J_m(x) \right]' = x^m \, J_{m-1}(x)$$

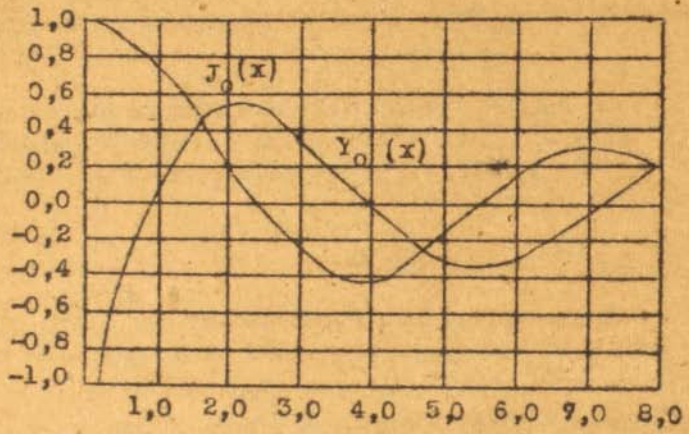
y

$$\left[x^{-m} \, J_m(x) \right]' = - x^{-m} \, J_{m+1}(x)$$

de modo que las funciones $J_{m-1}(x)$ y $J_{m+1}(x)$ deberán ser nulas para $x = x$.

(Ver cuadro en la pág. .siguiente).

Las raíces de $J_m(x)$, tienen una distribución más o menos uniforme sobre el eje de las abscisas, presentando la particularidad de estar entre sí alejadas por una distancia aproximadamente igual al numero π.



Hemos dibujado los gráficos de las funciones: $J_0(x)$ e $Y_0(x)$ en los cuales podemos verificar algunas de las propiedades que acabamos de establecer, notando además la gran analogía existente entre dichas funciones y las trigonométricas. Dejamos al lector, la tarea de construir los gráficos de $J_1(x)$ y $J_2(x)$, y verificar la existencia de una raíz de $J_0(x)$ y otra de $J_2(x)$, entre cada par de raíces consecutivas de $J_1(x)$.

Mostraremos, todavía, analíticamente, las analogías que existen tentre las funciones de Bessel y las funciones sinusoidales.

Escribamos la ecuación de Bessel en su forma general.

$$y'' + \frac{1}{x}y' + (1 - \frac{m^2}{x^2})y = 0$$

y hagamos el cambio de variable:

$$y = p\,t$$

de modo que: $$y' = p't + p\,t'$$

e $$y'' = p''t + 2p't' + p\,t''$$

Reemplacemos estos valores en la ecuación de Bessel:

$$p''t + p\,t'' + (2p' + \frac{p}{x})t' + \frac{p't}{x} + (1 - \frac{m^2}{x^2})p\,t = 0 \qquad (1)$$

y determinemos la función p, de modo que:

$$2\,p' + \frac{p}{x} = 0$$

Separando las variables en esta ecuación:

$$\frac{p'}{p} + \frac{1}{2x} = 0$$

y multiplicando por dx e integrando:

$$\ln\, p\sqrt{x} = \text{Log } A$$

de donde sacamos:

$$p = \frac{A}{\sqrt{x}}$$

y poniendo A = 1, ya que nos basta una solución particular:

$$p = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Calculando p', p'' y reemplazando en la ecuación (1), obtenemos después de reducir:

$$t'' + \left[1 + \frac{\frac{1}{4} - m^2}{x^2} \right] t = 0 \qquad (2)$$

Si en esta ecuación se hace $m = \pm 1/2$ ella se reduce a;

$$t'' + t = 0$$

cuya solución es;

$$t = a_0 \cos x + a_1 \operatorname{sen} x$$

y como; $y = p\,t$

resulta; $$y = \frac{a_0 \cos x + a_1 \operatorname{sen} x}{\sqrt{x}} \qquad (3)$$

que conviene con el resultado encontrado en pág. 214 por medio de desarrollo en serie.

Sigamos tratando el caso general de la ecuación (2);

Llamemos; $$F(x) = 1 + \frac{\frac{1}{4} - m^2}{x^2}$$

y observemos que si x crece, la fracción se hará tan pequeña como nosotros lo deseamos, pudiéndose poner;

$$(1 - \varepsilon)^2 < F(x) < (1 + \varepsilon)^2$$

en que ε es una cantidad arbitrariamente pequeña.

Trataremos, ahora, de comparar la ecuación;

$$t'' + F(x)\, t = 0 \qquad (4)$$

con las ecuaciones:

$$s_1'' + (1 - s)^2 \quad s_1 = 0 \qquad (5)$$

y

$$s_2'' + (1 + s)^2 \quad s_2 = 0 \qquad (6)$$

Para ello, escribamos dos ecuaciones generales del tipo de la ecuación (4). Sean ellas:

y

$$u'' + a(x)u = 0 \qquad (7)$$

$$v'' + b(x)v = 0$$

en que supondremos: $a(x) > b(x) > 0$

y supondremos además:

$$u(x_0) = v(x_0)$$

$$u'(x_0) = v'(x_0)$$

Estas ecuaciones, nos dicen que las funciones $u(x)$ y $v(x)$, representadas en un sistema de ejes, parten de un punto común, y tienen una misma tangente en dicho punto.

Escribamos nuevamente las ecuaciones:

$$\begin{array}{c|l} v & u'' + a(x)\ u = 0 \\ u & v'' + b(x)\ v = 0 \end{array}$$

y después de multiplicarlas por los factores indicados, restemos miembro a miembro:

$$v\,u'' - u\,v'' + \left[a(x) - b(x)\right] u\,v = 0$$

o sea:

$$u'' - v\,u'' = \left[a(x) - b(x)\right] u\,v$$

que escribimos:

$$(u\,v' - v\,u')' = \left[a(x) - b(x)\right] u\,v$$

y si suponemos que las funciones u y v, son de mismo signo, tendremos;

$$(u\,v' - v\,u')' > 0$$

ya que $a(x) - b(x) \quad 0$

Integrando entre x_o y $\underline{x}$:

$$\int_{x_o}^{x} (u\,v' - u'\,v)'\,dx > 0$$

$$\left[u\,v' - u'v\right]_{x_o}^{x} > 0$$

Esta integral es nula en el límite inferior, en virtud de que:

$$u(x_o) = v(x_o)$$

y $u'(x_o) = v'(x_o)$

de modo que la desigualdad se reduce a;

$$u\,v' = u'v > 0$$

o bien;

$$\frac{v'}{v} - \frac{u'}{u} > 0$$

Integrando nuevamente entre x_o y $\underline{x}$:

$$\int_{x_o}^{x} \frac{v'}{v}\,dx - \int_{x_o}^{x} \frac{u'}{u}\,dx > 0$$

o sea;

$$\ln \frac{v}{u} > 0$$

de modo que;

$$\boxed{v > u} \qquad (8)$$

desigualdad que muestra que, las distancias entre dos raíces en v, son mayores que las distancias entre dos raíces en u.

Aplicaremos esta deducción general a la comparación de las ecuaciones (4), (5) y (6).

Recordemos, primeramente que;

$$J_m(x) = \frac{t}{\sqrt{x}}$$

de modo que la distancia entre dos raíces en t, será igual a la distancia entre dos raíces de $J_m(x)$, siempre que $\sqrt{x} \neq 0$.

Consideraremos dos casos, sucesivamente;

a) Comparemos, en primer lugar, las ecuaciones (4) y (5), para lo cual, debemos hacer;

$$u = t, \quad v = s_1, \quad a(x) = F(x), \quad b(x) = (1 - \varepsilon)^2$$

obteniendo, en virtud de la ecuación (8);

$$s_1 > t$$

que nos dice que, las raíces en t, o sea las raíces de $J_m(x)$, están entre sí, a menor distancia que las raíces de s_1.

b.) Comparemos, en seguida, las ecuaciones (4) y (6);

Haciendo;

$$u = s_2, \quad v = t, \quad a(x) = (1+\varepsilon)^2, \quad b(x) = F(x)$$

obtenemos, aplicando la ecuación (8);

$$t > s_2$$

que muestra, que las raíces de $J_m(x)$, distan entre sí, más que las de s_2.

Calculemos, entonces, s_1 y s_2, por integración directa de las ecuaciones diferenciales (5) y (6):

Obtenemos;

$$s_1 = A_1 \cos \left[(1 - \varepsilon)x + \theta_1\right]$$

$$s_2 = A_2 \cos \left[(1+\varepsilon)x + \theta_2\right]$$

Estas ecuaciones, nos muestran que: La distancia entre dos raíces de s_1, es: $\frac{\pi}{1-\varepsilon}$ mientras, la distancia entre dos raíces de s_2, vale; $\frac{\pi}{1+\varepsilon}$

Entonces, si llamamos d a la distancia entre dos raíces de $J_m(x)$, podremos resumir las conclusiones de a) y b), diciendo;

$$\frac{\pi}{1+\varepsilon} < d < \frac{\pi}{1-\varepsilon} \qquad (9)$$

Esta desigualdad, muestra que las raíces de $J_m(x)$, tienen una distancia mutua, que se aproxima al número π.

El análisis anterior, puede llevarse aún más lejos, con el resultado que para x grande, la función t, toma aproximadamente la forma;

$$t = A \cos (x + \theta)$$

lo que significa para $J_m(x)$:

$$J_m(x) = \frac{A \cos(x+\theta)}{\sqrt{x}} \qquad (10)$$

Daremos una fórmula análoga para la función $Y_m(x)$, recordando que:

$$Y_m(x) = J_m(x) \int \frac{dx}{x\ J_m^2(x)}$$

(Haciendo B = 1 en fórmula (3), pág. 233

De (10), sacamos:

$$x\ J_m^2(x) = A^2 \cos^2(x+\theta)$$

$$Y_m(x) = \frac{A \cos(x+\theta)}{A^2 \sqrt{x}} \int \frac{dx}{\cos^2(x+\theta)}$$

Efectuando la integral, poniendo $\frac{1}{A} = B$, y simplificando

$$Y_m(x) = \frac{B \operatorname{sen}(x+\theta)}{\sqrt{x}} \qquad (11)$$

Las fórmulas (10) y (11), permiten calcular aproximadamente, las funciones $J_m(x)$ e $Y_m(x)$, por medio de expresiones trigonométricas, pero solamente en la hipotesis de valores grandes para la variable x, y habiendo determinado, previamente, los valores A, B y θ.

Ortogonalidad de funciones de Bessel:

En el párrafo anterior, hemos hablado de la representción gráfica de las funciones de Bessel, y hemos llamado raíces de $J_m(x)$, a las abscisas de los puntos en los cuales dicha funcion se hace nula.

Se puede demostrar, que las raíces de la ecuación:

$$J_m(x) = 0$$

existen en número infinito. Aceptaremos esta proposición, ya que su demostración no nos reportará utilidad alguna, y supondremos que: x_1, x_2, x_3, ... x_n ... x_r... son raíces de dicha ecuación:

Escribamos la ecuación de Bessel:

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{m^2}{x^2}\right) y = 0 \qquad (1)$$

en que $\frac{y'}{x}$ e y'' son derivadas de y con respecto a la variable x.

Evidentemente, una solución de esta ecuación, será:

$$y = J_m(\bar{x})$$

y si hacemos $\bar{x} = x_n$ x tendremos:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dx}$$

pero $$\frac{dx}{dx} = \frac{1}{x_n}$$

luego: $$y' = \frac{1}{x_n} \frac{dy}{dx}$$

y derivando nuevamente:

lo que significa para $J_m(x)$;

$$J_m(x) = \frac{A \cos(x+\theta)}{\sqrt{x}} \qquad (10)$$

Daremos una fórmula análoga para la función $Y_m(x)$, recordando que;

$$Y_m(x) = J_m(x) \int \frac{dx}{x\ J_m^2(x)}$$

(Haciendo B = 1. en fórmula (3), pág. 233

De (10), sacamos;

$$x\ J_m^2(x) = A^2 \cos^2(x+\theta)$$

$$Y_m(x) = \frac{A \cos(x+\theta)}{A^2 \sqrt{x}} \int \frac{dx}{\cos^2(x+\theta)}$$

Efectuando la integral, poniendo $\frac{1}{A} = B$, y simplificando

$$Y_m(x) = \frac{B \operatorname{sen}(x+\theta)}{\sqrt{x}} \qquad (11)$$

Las fórmulas (10) y (11), permiten calcular aproximadamente, las funciones $J_m(x)$ e $Y_m(x)$, por medio de expresiones trigonométricas, pero solamente en la hipótesis de valores grandes para la variable x, y habiendo determinado, previamente, los valores A, B y θ.

Ortogonalidad de funciones de Bessel;

En el párrafo anterior, hemos hablado de la representción gráfica de las funciones de Bessel, y hemos llamado raíces de $J_m(x)$, a las abscisas de los puntos en los cuales dicha función se hace nula.

Se puede demostrar, que las raíces de la ecuación:

$$J_m(x) = 0$$

existen en número infinito. Aceptaremos esta proposición, ya que su demostración no nos reportará utilidad alguna, y supondremos que: x_1, x_2, x_3, ... x_n ... x_r... son raíces de dicha ecuación:

Escribamos la ecuación de Bessel:

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{m^2}{x^2}\right) y = 0 \qquad (1)$$

en que $\frac{y'}{x}$ e y'' son derivadas de y con respecto a la variable x.

Evidentemente, una solución de esta ecuación, será:

$$y = J_m(\bar{x})$$

y si hacemos $\bar{x} = x_n$ x tendremos:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dx}$$

pero $$\frac{dx}{dx} = \frac{1}{x_n}$$

luego: $$y' = \frac{1}{x_n} \frac{dy}{dx}$$

y derivando nuevamente:

$$y'' = \frac{1}{x_n} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{dx}{dx} = \frac{1}{x_n^2} \cdot \frac{d^2y}{dx^2}$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación (1), y multiplicando por x_n^2;

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + (x_n^2 - \frac{m^2}{x^2}) y = 0$$

que escribimos nuevamente;

$$y'' + \frac{1}{x} y' + (x_n^2 - \frac{m^2}{x^2}) y = 0 \qquad (2)$$

Escribamos una nueva ecuación de este tipo, cambiando y por z, y x_n por x_r;

$$z'' + \frac{1}{x} z' + (x_r^2 - \frac{m^2}{x^2}) z = 0 \qquad (3)$$

Recordemos que una solución de (1) está dada por;

$$y = J_m(\bar{x})$$

y de acuerdo con la sustitución $\bar{x} = x_n x$, podemos afirmar que;

$$y = J_m(x_n x)$$

$$z = J_m(x_r x)$$

son soluciones de las ecuaciones (2) y (3), respectivamente; Escribamos estas soluciones en la forma;

$$z \;\Big|\; x\,y'' + y' + x_n^2\,x\,y - m^2\,\frac{y}{x} = 0$$

$$x \;\Big|\; x\,z'' + z' + x_r^2\,x\,z - m^2\,\frac{z}{x} = 0$$

y restemos, después de multiplicar por los factores indicados:

$$x\,z\,y'' + z\,y' - x\,y\,z'' - y\,z' + (x_n^2 - x_r^2)\,x\,y\,z = 0$$

Esta ecuación se puede escribir:

$$(x\,y'z - x\,y\,z')' = (x_r^2 - x_n^2)\,x\,y\,z$$

e integrando esta ecuación entre 0 y 1:

$$(x_r^2 - x_n^2)\int_0^1 x\,y\,z\;dx = \Big[x\,y'z - x\,y\,z'\Big]_0^1$$

Reemplazando las funciones y y z por sus valores:

$$\int_0^1 x\,J_m(x_n\,x)\,J_m(x_r\,x)\,dx = \frac{J_n\,U_m(x_r)\,J_m'(x_n) - x_r\,J_m(x_n)\,J_m'(x_r)}{x_r^2 - x_r^2}$$

Consideraremos dos casos para esta fórmula:

a) $x_r \neq x_n$: Entonces:

$$x_r^2 - x_n^2 \neq 0$$

y como: $\qquad J_m(x_r) = J_m(x_n) = 0$

por ser $x = x_r$ y $x = x_n$ raíces de $J_m(x)$ se obtiene:

$$\int_0^1 x\ J_m(x_n\, x)\ J_m(x_r\, x)\ dx = 0 \qquad (5)$$

b) $x_r = x_n$: En este caso, el resultado de la integral, se hace indeterminado:

Tendremos que calcular, por tanto:

$$L = \lim_{x_r \longrightarrow x_n} \frac{x_n\ J_m(x_r)\ J_m'(x_n) - x_r\ J_m(x_n)\ J_m'(x_r)}{x_r^2 - x_n^2}$$

para lo cual, aplicaremos la regla de L'Hopital, derivando con respecto a x_r: Tendremos:

$$L = \lim_{x_r \to x_n} \frac{x_n\ J_m'(x_r) J_m'(x_n) - J_m(x_n)\ J_m'(x_r) - x_r\ J_m(x_n)\ J_m''(s_r)}{2\ x_r}$$

o sea: $$L = \frac{a x_n\ J_m'^2(x_n) - J_m(x_n)\ J_m'(x_n) - xn\ J_m(x\,n)\ J_m''(x_n)}{2\ x_n}$$

$$L = \frac{1}{2}\ J_m'^2(x_n) - J_m(x_n)\left[\frac{J_m''(x_n)}{2} + \frac{J_m'(x_n)}{2\ x_n}\right] = \frac{1}{2}\ J_m'^2(x_n)$$

Con esto, podemos escribir:

$$\int_0^1 x\ J_m^2(x_n\, x)\ dx = \frac{1}{2}\ J_m'^2\ (x_n) \qquad (6)$$

La ecuación (5), escrita en la forma:

$$\int_0^1 \sqrt{x}\ J_m(x_n\, x)\ .\ \sqrt{x}\ J_m(x_r\, x)\ dx = 0$$

para $x_n \neq x_r$, nos muestra que las funciones:

$$\sqrt{x}\ J_m(x_n\ x)\ \ y\ \ \sqrt{x}\ J_m(x_r\ x)$$

son ortogonales en el intervalo (0,1).

Podemos dar otra forma a las fórmulas (5) y (6), que es frecuente en las aplicaciones de las Funciones de Bessel.

Haciendo el cambio de variable: $x^2 = s$; $2x\,dx = ds$, dichas fórmulas se transforman en:

$$\int_0^1 J_m(x_n \sqrt{s}) \cdot J_m(x_r \sqrt{s})\ ds = 0 \qquad (7)$$

para $x_n \neq x_r$.

$$\int_0^1 J_m^2\ (x_n \sqrt{s})\,ds = J_m'^2\ (x_n) \qquad (8)$$

La ecuación (7) nos dice que: Las funciones $J_m(x_n \sqrt{s})$ y $J_m(x_r \sqrt{s})$ son ortogonales, en el intervalo (0,1).

Entonces, si se tiene un conjunto de raíces: $x_1, x_2, \ldots\ x_n \ldots x_r \ldots$ de la ecuación $J_m(x) = 0$, se verifica que las funciones que se deducen de la fórmula:

$$J_m(x_n\ \sqrt{x})$$

dando a n, los valores $n = 1, 2 \ldots n, \ldots r, \ldots$ forman un sistema de funciones ortogonales en el intervalo (0,1).

Desarrollo en serie de Funciones de Bessel:

Si disponemos de un conjunto de raíces de una

función de Bessel, nos es posible, según hemos visto, encontrar un sistema de funciones ortogonales. Si tenemos, entonces, una función f(x), podemos desarrollarla en serie de funciones de Bessel, aprovechando la ortogonalidad de dicho sistema de funciones.

Sea su desarrollo de la forma:

$$f(x) = h_1 \; J_m(x_1 \sqrt{x}) + h_2 \; J_m(x_2 \sqrt{x}) + \ldots + h_n \; J_m(x_n \sqrt{x}) + \ldots$$

en que x_1, x_2, x_3, ... x_n, son raíces de la ecuación:

$$J_m(x) = 0$$

Para calcular el coeficiente h_n, multiplicamos la ecuación, escalarmente por $J_m(x_n\sqrt{x})$ y teniendo en cuenta que las funciones del desarrollo son ortogonales, en el intervalo (0,1), obtenemos:

$$\int_0^1 f(x) \; J_m(x_n \sqrt{x}) \; dx = h_n \int_0^1 J_m^2(x_n \sqrt{x}) \; dx$$

y como esta última integral vale: $J_m'^2(x_n)$:

$$h_n = \frac{1}{J_m'^2(x_n)} \int_0^1 f(x) \; J_m(x_n \sqrt{x}) \; dx$$

Esta fórmula determina todos los coeficientes del desarrollo de la función f(x) en serie de funciones de orden m,

En general, se utilizan sólo desarrollos, en funciones de orden cero.

Aplicación:

Desarrollar la función f(x) = 1, en serie de

funciones de orden cero.

Aplicando la fórmula general para $m = 0$ y $f(x) = 1$, se obtiene:

$$h_n = \frac{1}{J_o'^2(x_n)} \int_o^1 J_o(x_n \sqrt{x})\, dx$$

Recordemos que: $J_o'(x_n) = - J_1(x_n)$

y hagamos el cambio de variable:

$$x_n \sqrt{x} = s$$

de donde sacamos: $dx = \frac{2}{x_n^2}\, s\, ds$

Reemplazando en la fórmula:

$$h_n = \frac{2}{x_n^2\, J_1^2(x_n)} \int_o^{x_n} s\, J_o(s)\, ds$$

cuyo valor es:

$$h_n = \frac{2}{x_n^2\, J_1^2(x_n)} \Big[s\, J_1(s) \Big]_o^{x_n}$$

o sea:

$$h_n = \frac{2\, x_n\, J_1(x_n)}{x_n^2\, J_1^2(x_n)}$$

y simplificando:

$$h_n = \frac{2}{x_n\, J_1(x_n)}$$

función de Bessel, nos es posible, según hemos visto, encontrar un sistema de funciones ortogonales. Si tenemos, entonces, una función f(x), podemos desarrollarla en serie de funciones de Bessel, aprovechando la ortogonalidad de dicho sistema de funciones.

Sea su desarrollo de la forma:

$$f(x) = h_1 \; J_m(x_1 \sqrt{x}) + h_2 \, J_m(x_2 \sqrt{x}) + \ldots + h_n \, J_m(x_n \sqrt{x}) + \ldots$$

en que x_1, x_2, x_3, ... x_n, son raíces de la ecuación:

$$J_m(x) = 0$$

Para calcular el coeficiente h_n, multiplicamos la ecuación, escalarmente por $J_m(x_n\sqrt{x})$ y teniendo en cuenta que las funciones del desarrollo son ortogonales, en el intervalo (0,1), obtenemos:

$$\int_0^1 f(x) \, J_m(x_n \sqrt{x}) \, dx = h_n \int_0^1 J_m^2(x_n \sqrt{x}) \, dx$$

y como esta última integral vale: $J_m'^2(x_n)$:

$$h_n = \frac{1}{J_m'^2(x_n)} \int_0^1 f(x) \, J_m(x_n \sqrt{x}) \, dx$$

Esta fórmula determina todos los coeficientes del desarrollo de la función f(x) en serie de funciones de orden m,

En general, se utilizan sólo desarrollos, en funciones de orden cero.

Aplicación:

Desarrollar la función f(x) = 1, en serie de

funciones de orden cero.

Aplicando la fórmula general para $m = 0$ y $f(x) = 1$, se obtiene;

$$h_n = \frac{1}{J_o'^2(x_n)} \int_o^1 J_o(x_n \sqrt{x})\, dx$$

Recordemos que; $J'_o(x_n) = - J_1(x_n)$

y hagamos el cambio de variable;

$$x_n \sqrt{x} = s$$

de donde sacamos; $dx = \frac{2}{x_n^2}\, s\, ds$

Reemplazando en la fórmula;

$$h_n = \frac{2}{x_n^2\ J_1^2(x_n)} \int_o^{x_n} s\, J_o(s)\, ds$$

cuyo valor es;

$$h_n = \frac{2}{x_n^2\ J_1^2(x_n)} \Big[s\, J_1(s) \Big]_o^{x_n}$$

o sea;

$$h_n = \frac{2\, x_n\, J_1(x_n)}{x_n^2\ J_1^2(x_n)}$$

y simplificando;

$$h_n = \frac{2}{x_n\, J_1(x_n)}$$

Dando en seguida a n los valores 1,2,3, ... n, obtenemos:

$$f(x)=1= \cdot \frac{2\,J_o(x_1\sqrt{x})}{x_1\;J_1\;(x_1)} + \frac{2\,J_o(x_2\sqrt{x})}{x_2\,J_1\,(x_2)} + \ldots + \frac{2\,J_o(x_n\sqrt{x})}{x_n\;J_1\,(x_n)} \ldots$$

y dividiendo por 2:

$$\frac{1}{2} = \frac{J_o(x_1\sqrt{x})}{x_1\,J_1\,(x_1)} + \frac{J_o(x_2\sqrt{x})}{x_2\,J_1\;(x_2)} + \ldots + \frac{J_o(x_n\sqrt{x})}{x_n\;J_1(x_n)}$$

Cálculo numérico de Funciones de Bessel:

Hemos desarrollado la teoría necesaria para poder expresar en forma de serie de funciones de Bessel, una función f(x), cualquiera.

Como hemos visto, necesitamos, para la resolución de este problema, conocer el conjunto de raíces: $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ de la función $J_m(x)$, que deseamos hacer intervenir en nuestro desarrollo.

Para este efecto, se ha construído tablas de funciones de Bessel, en las cuales se puede encontrar la función que se desee, calculada con aproximación de cuatro o más decimales, para diferentes valores de su argumento.

Para la formación de estas tablas, se ha trabajado directamente por medio de los desarrollos en series de las funciones correspondientes.

Así, si deseamos calcular, por ejemplo, la función $J_o(x)$, para diferentes valores de su variable, debemos partir del desarrollo:

$$J_o(x) = 1 - \frac{1}{1!1!}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{2!2!}\left(\frac{x}{2}\right)^4 - \frac{1}{3!3!}\left(\frac{x}{2}\right)^6 \pm \ldots\ldots$$

Calculemos la función, por ejemplo, para el valor x = 1;

Agrupemos los términos positivos en una columna, y los negativos en otra. Primeramente, colocamos en la columna positiva el primer término que vale: 1,0000, ya que calcularemos con cuatro decimales exactos. (Ver cuadro en pág. 255).

Situamos, luego en la columna negativa, el segundo término del desarrollo, que para x = 1, vale - 1/4. Para calcular el tercer término, multiplicamos el anterior por $\frac{1}{2.2}\left(\frac{1}{2}\right)^2$. obteniendo 0,0156, que colocamos en la primera columna.

Luego, multiplicamos este valor por $-\frac{1}{3.3}\left(\frac{1}{2}\right)^2$, obteniendo: - 0,0004. Si deseamos calcular un quinto término, debemos multiplicar el anterior por $\frac{1}{4.4}\left(\frac{1}{2}\right)^2$ y encontramos así el valor: $6{,}2 \cdot 10^{-6}$ que queda fuera del orden de magnitud que estamos considerando, ya que no influye sobre la cuarta cifra decimal. Sumamos, entonces, ambas columnas, separadamente, y luego restamos la columna negativa de la positiva, obteniendo:

$$J_o(1) = 0{,}7652$$

+	−
1,0000	0,2500
0,0156	0,0004
1,0156	0,2504
-0,2504	
0,7652	

Damos a continuación, una tabla de valores de la función $J_0(x)$, para valores de x, comprendidos entre 0 y 15:

x	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8
0	1,0000	0,9900	0,9604	0,9120	0,8463
1	0,7652	0,6711	0,5669	0,4554	0,3400
2	0,2239	0,1104	0,0025	-0,0968	-0,1850
3	-0,2601	-0,3202	-0,3643	-0,3918	-0,4024
4	-0,3971	-0,3766	-0,3423	-0,2961	-0,2404
5	-0,1776	-0,1103	-0,0412	0,0270	0,0917
6	0,1506	0,2017	0,2433	0,2740	0,2931
7	0,3001	0,2951	0,2786	0,2516	0,2154
8	0,1717	0,1222	0,0692	0,0146	-0,0392
9	-0,0903	-0,1357	-0,1768	-0,2090	-0,2323
10	-0,2459	-0,2496	-0,2434	-0,2276	-0,2032
11	-0,1712	-0,1330	0,0902	-0,0446	0,0020
12	0,0477	0,0908	0,1296	0,1626	0,1887
13	0,2069	0,2167	0,2177	0,2101	0,1943
14	0,1711	0,1414	0,1065	0,0679	0,0271
15	-0,0142	-0,0544	-0,0919	-0,1253	-0,1533

Podemos observar que, en el intervalo (0,15), existen 5 raíces de la función $J_0(x)$. Ellas aproximadamente son:

$x_1 = 2,4 \quad x_3 = 8,6$

$x_2 = 5,6 \quad x_4 = 11,8 \quad x_5 = 15,0$

Damos por último, las funciones $J_1(x)$ e $Y_0(x)$, tabuladas para valores enteros de x, y comprendidos en el mismo intervalo (0,15).

x	$J_1(x)$	$Y_0(x)$
0	0,0000	$-\infty$
1	0,4401	0,0883
2	0,5767	0,5104
3	0,3391	0,3769
4	-0,0660	-0,0169
5	-0,3276	-0,3085
6	-0,2767	-0,2882
7	-0,0047	-0,0259
8	0,2346	0,2235
9	0,2453	0,2499
10	0,0435	0,0557
11	-0,1768	-0,1688
12	-0,2234	-0,2252
13	-0,0703	-0,0782
14	0,1334	0,1272
15	0,2051	0,2055

CUARTA PARTE

ECUACIONES CON DERIVADAS PARCIALES DE LA FISICA MATEMATICA

LA CUERDA VIBRANTE

Supongamos un alambre elástico de longitud L, extendido entre dos puntos de un eje OX, separados entre sí; por una distancia L. Supongamos además, que este alambre se separa de su posición de equilibrio, hasta hacerlo adoptar la forma de una cierta curva de ecuación:

$$u = \varphi(x)$$

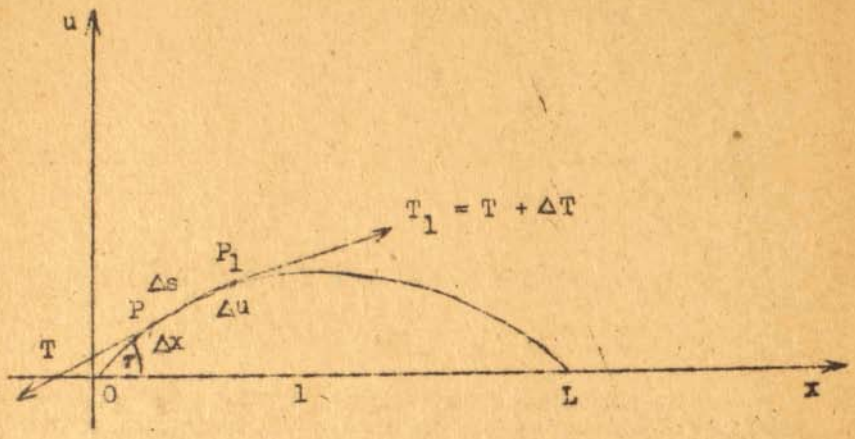
En un instante t se deja en libertad la cuerda a partir del reposo, y ésta comienza a vibrar.

Se plantea entonces el problema de determinar la posición de cada punto de la cuerda en cada instante t.

Sea la figura, la imagen de la cuerda vibrando.

Debemos establecer una relación de la forma:

$$u = f(x, t)$$



para lo cual necesitemos deducir la ecuación diferencial del movimiento.

Llamemos ds a un elemento de longitud de la cuerda en vibración; entonces

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}\, dx$$

y considerando que $\frac{\partial u}{\partial x}$ es muy pequeño, podemos despreciar $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$ con lo cual la ecuación anterior queda:

$$ds \approx dx$$

Sea u la masa de la cuerda por unidad de longitud, y sea T la tensión que actúa en el punto P de la cuerda.

Si despreciamos la acción de la gravedad sobre el elemento de longitud ds, podremos encontrar en forma sen-

-cilla la ecuación diferencial del movimiento;

De la figura, sacamos;

$$\text{sen } \tau \frac{\partial u}{\partial s} \approx \frac{\partial u}{\partial x}$$

con lo cual, la componente según el eje O U de la tensión en P, será;

$$T \frac{\partial u}{\partial x}$$

Si damos a x un incremento dx dicha componente variará en una cantidad;

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial u}{\partial x}\right) dx$$

que será equilibrada según la ley de Newton por la fuerza;

$$u \, ds \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Igualando las dos expresiones de la fuerza, y recordando que;

$$ds \approx dx$$

obtenemos;

$$u \, dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial u}{\partial x}\right) dx$$

y dividiendo la ecuación por u dx;

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

que representa la ecuación diferencial buscada.

Vibración con tensión constante:

En los numerosos casos en que T se puede considerar virtualmente constante a lo largo de la cuerda, la ecuación diferencial que hemos deducido en el párrafo anterior, se puede escribir:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{T}{u} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Antes de integrar esta ecuación, busquemos las dimensiones de la constante:

$$\frac{T}{u}$$

Evidentemente: $$\left[T\right] = \left[\frac{gr.cm}{seg^2}\right]$$

y $$\left[u\right] = \left[\frac{masa}{long.}\right] = \left[\frac{gr}{cm}\right]$$

Luego: $$\left[\frac{T}{u}\right] = \left[\frac{cm^2}{seg^2}\right]$$

lo que nos dice que dicha constante, tiene las dimensiones de una velocidad al cuadrado.

Llamemos por tanto:

$$\frac{T}{u} = v^2$$

Por lo tanto, podemos reemplazar $\frac{T}{u} = v^2$ en la ecuación, que queda:

$$v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad (6)$$

Propongamos como soluciones particulares de la ecuación funciones del tipo:

$$u = X(x)\ S(t) \qquad (7)$$

Derivando parcialmente obtenemos:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''\ S$$

y

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = X\ S''$$

las cuales reemplazadas en (6) dan:

$$v^2\ X''\ S = X\ S''$$

o bien:

$$v^2\ \frac{X''}{X} = \frac{S''}{S}$$

Recordando que x y t son variables independientes se reduce que el primer miembro no depende de t y el segundo que le es igual, no depende de x. Ahora bien para que se cumpla la relación cada miembro de la ecuación debe ser igual a una constante. Entonces:

$$v^2\ \frac{X''}{X} = \frac{S''}{S} = \lambda$$

Si tenemos una imagen de la cuer vibrando, vemos que en P(fig. de pág. 266)

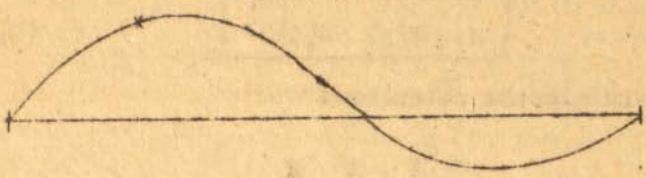
X'' es negativo

y

X es positiva

Luego la constante es negativa. Por lo tanto podemos poner:

X es positiva



$$v^2 \frac{X''}{X} = \frac{S''}{S} = -\omega^2$$

con lo cual quedan las ecuaciones:

$$S'' = -\omega^2 S \qquad (8)$$

y

$$X'' = -\frac{\omega^2}{v^2} X$$

O sea, con esto hemos llevado una ecuación diferencial con derivadas parciales a dos ecuaciones diferenciales de derivadas comunes. Resolviendo las ecuaciones (8) obtenemos soluciones de la forma:

$$S = \begin{matrix}\cos \\ \text{sen}\end{matrix} \omega t$$

$$X = \begin{matrix}\cos \\ \text{sen}\end{matrix} \frac{\omega}{v} x$$

que reemplazadas en (7) dan como resultado:

$$u = \begin{matrix}\cos \\ \text{sen}\end{matrix} \frac{\omega}{v} x \quad \begin{matrix}\cos \\ \text{sen}\end{matrix} \omega t \qquad (9)$$

Se obtiene así cuatro tipos de soluciones cada uno de los cuales puede dar origen a infinitas soluciones. Elegiremos entre estos tipos aquellos que se adapten a las condiciones del problema y los combinaremos de acuerdo con el principio de superposición.

La variación de las variables está dada por

$$0 \leq x \leq L$$

$$t \geq 0$$

Estableceremos ahora las denominadas condiciones en los bordes. Como la cuerda está fija en sus extremos debe verificarse que:

$$u\ (0,t) = u\ (L,\ t) = 0$$

Además debemos conocer la forma que inicialmente tiene la cuerda. Es decir:

$$u(x,0) = \varphi(x)$$

También debemos conocer:

$$u(x,0) = \psi(x)$$

siendo:

$$u = \frac{\partial u}{\partial t}$$

o sea, la velocidad inicial.

Luego resumiendo las condiciones en los bordes del problema serían:

$$\begin{aligned} u(0,t) &= u(L,t) = 0 \\ u(x,0) &= \varphi(x) \\ u(x,0) &= \psi(x) \end{aligned} \qquad (10)$$

Aplicando estas condiciones a la ecuación (9) tenemos: para $x = 0$

$$0 = \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \right\} \begin{matrix} \cos \\ \text{sen} \end{matrix} \omega t$$

luego sólo podemos emplear el valor $\text{sen} \frac{\omega}{v} x$ ya que debe satisfacerse independientemente de t, luego queda:

$$u = \text{sen} \frac{\omega}{v} x \begin{matrix} \cos \\ \text{sen} \end{matrix} \omega t$$

para x = L

$$0 = \text{sen} \frac{\omega}{v} L \begin{matrix} \cos \\ \text{sen} \end{matrix} \omega t$$

por lo tanto, la condición sería:

$$\frac{\omega L}{v} = n \pi$$

siendo n = 1, 2, 3....

o sea;

$$\frac{\omega}{v} = \frac{n \pi}{L}$$

$$u_n = \frac{n \pi}{L} x \begin{matrix} \cos \\ \text{sen} \end{matrix} \frac{n \pi v}{L} t$$

siendo u_n una de las infinitas soluciones particulares.

Por lo tanto, en virtud del principio de superposición se tendrá como solución de la ecuación:

$$u = \Sigma A_n \; u_n$$

y reemplazando u_n se tiene:

$$u = \sum_{1}^{\infty} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x \left[A_n \cos \frac{n\pi v}{L} t + B_n \operatorname{sen} \frac{n\pi v}{L} t \right]$$

Para determinar A y B emplearemos la segunda y tercera condición.

$$u(x,0) = \Sigma A_n \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x = \varphi(x) \qquad (11)$$

$$u(x,0) = \Sigma B_n \frac{n\pi v}{L} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x = \psi(x) \qquad (12)$$

Consideremos el intervalo (0,L). Multipliquemos (11) escalarmente por $\operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x$. Obtenemos:

$$A_n \cdot \frac{1}{2} = \int \varphi(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x \, dx \qquad (13)$$

o sea:

$$A_n = \frac{2}{L} \int \varphi(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x \, dx$$

De igual modo para B_n se obtiene:

$$B_n = \frac{2}{n\pi v} \int \psi(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x \, dx \qquad (14)$$

Como se vé (13) y(14) son las fórmulas obtenidas en las Series de Fourier para la extensión del intervalo del desarrollo. Por esto a este tipo de solución se le llama "solución por Series de Fourier".

Veamos un ejemplo;

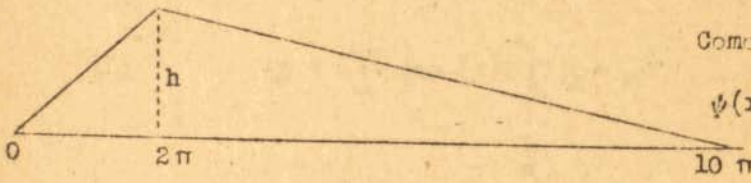
Sea una cuerda vibrando cuyos datos son;

$$v = 1.000 \text{ cm/seg} \qquad L = 10\pi$$

$$\varphi(x) \begin{cases} \frac{h}{2\pi} x & 0 \leq x \leq 2\pi \\ -(10\pi - x)\frac{h}{8\pi} & 2\pi \leq x \leq 10\pi \end{cases}$$

$$\psi(x) = 0$$

O sea tenemos la cuerda en un punto situado a un quinto de su longitud y la soltamos con velocidad inicial cero. (Este caso fué tratado también en el Capítulo: Series de Fourier).



Como

$$\psi(x) = 0$$

se tiene

$$B_n = 0$$

Calculemos A_n;

$$A_n = \frac{1}{5\pi} \int_0^{10\pi} \varphi(x) \operatorname{sen} \frac{n x}{10} \, dx$$

integrando por partes y luego fraccionando el intervalo de 0 a 2π y de 2π a 10π, obtenemos;

$$A_n = \frac{1}{5\pi}\left\{\left[-\varphi(x)\frac{\cos\frac{n\,x}{10}}{\frac{n}{10}}\right]_0^{10\pi} + \int_0^{10\pi}\varphi'(x)\frac{\cos\frac{n\,x}{10}}{\frac{n}{10}}\,dx\right\}$$

El primer término vale cero ya que:

$$\varphi(x) = 0$$

para $x = 0$ y $x = 10\pi$

Luego:

$$A_n = \frac{2}{2\pi}\left[\int_0^{2\pi}\frac{h}{2\pi}\cos\frac{n\,x}{10}\,dx + \int_{2\pi}^{10\pi}-\frac{h}{8\pi}\cos\frac{n\,x}{10}\,dx\right.$$

$$= \frac{10\,h}{n^2\pi^2}\left[\left[\operatorname{sen}\frac{n\,x}{10}\right]_0^{2\pi} - \left[\frac{1}{4}\operatorname{sen}\frac{n\,x}{10}\right]_{2\pi}^{10\pi}\right]$$

$$A_n = \frac{10}{n^2\pi}\frac{h}{2}\;\frac{5}{4}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{5}$$

Por lo tanto, la solución de la ecuación sería:

$$u = \frac{10}{4\pi}\frac{h}{2}\sum_1^{\infty}\frac{1}{n^2}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{5}\operatorname{sen}\frac{n\,x}{10}\cos 100\,nt$$

Para darnos cuenta de la convergencia del desarrollo, calcularemos el valor de los coeficientes desde $n = 1$ hasta $n = 10$ y referiremos sus valores al primero.

Tenemos:

$$A_1 = \frac{10\ h}{\pi^2}\ \frac{5}{4}\ \text{sen}\ 36° = \frac{10\ h}{\pi^2}\ \frac{5}{4}\ 0,59$$

$$A_2 = \frac{10\ h}{\pi^2}\ \frac{5}{4}\ \frac{\text{sen}\ 72°}{4} = \frac{10\ h}{\pi^2}\ \frac{5}{4}\ \frac{0,95}{4}$$

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{\text{sen}\ 72°}{4\ \text{sen}\ 36°} = 0,40$$

$$A_2 = 0,40\ A_1$$

Procediendo de igual modo hasta A_{10} obtenemos la siguiente tabla de valores:

n	A_n	$A_n : A_1$ (%)
1	A_1	100
2	$0,40\ A_1$	40
3	$0,17\ A_1$	17
4	$0,06\ A_1$	6
5	0,00	0
6	$-0,03\ A_1$	- 3
7	$-0,03\ A_1$	- 3
8	$-0,03\ A_1$	- 3
9	$-0,01\ A_1$	- 1
10	0,00	0

V I B R A C I O N C O N T E N S I O N

V A R I A B L E

CASO DE LA CADENA:

Consideremos una cadena de largo L, que cuelga verticalmente, suspendida de su extremo superior. Si en un instante cualquiera, se la desvía ligeramente de su posición de equilibrio, ella comienza a vibrar.

Nos proponemos establecer la ecuación de su movimiento. Para ello, eligiremos un sistema de ejes coordenados, de modo que el eje de las X, se encuentre orientado según la vertical ascendente, con su origen situado en el punto inferior de la cadena, supuesta ésta en posición de equilibrio, y del eje de las U, vaya dirigido perpendicularmente al anterior.

Como en el caso de la Cuerda Vibrante, se obtiene la ecuación diferencial del movimiento de la cadena, en la forma:

$$\frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial x}\left(T \frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad (1)$$

en la cual, esta vez; $T = u g x$

representa la tensión que actúa en la cadena, por acción del propio peso del elemento O P de ella.

Este valor, aunque exacto sólo para la posición de equilibrio, puede hacerse extensivo al movimiento, siempre que la cadena no se desvíe, sino levemente de la vertical, durante su vibración.

Hecha esta aproximación, la ecuación diferencial, se reduce a;

$$g \frac{\partial}{\partial x}\left(x \frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad (2)$$

Para resolverla, supongamos que la función u, sea de la forma;

$$u = X(x)\ T(t)$$

Calculemos inmediatamente;

$$\frac{\partial u}{\partial x} = X'\ T$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = X\ T''$$

y sustituyendo en (2):

$$\frac{g(x\,X')}{X} = \frac{T''}{T}$$

que escribimos:

$$\frac{(x\,X')'}{X} = \frac{T''}{gT}$$

y razonando como en el caso anterior, deducimos que para que esta ecuación se pueda verificar para valores cualesquiera de x y t, que son variables independiente entre sí, es necesario, que ambos miembros sean iguales a una constante, que consideraremos negativa por las razones ya expuestas anteriormente.

Entonces:

$$\frac{(x\,X')'}{X} = \frac{T''}{gT} = -\omega^2$$

de donde sacamos:

$$T'' + \omega^2 g\,T = 0 \qquad (3)$$

$$x\,X'' + X' + \omega^2\,X = 0 \qquad (4)$$

La ecuación (3) da como solución:

$$T = A_1 \cos \omega \sqrt{g}\, t + A_2 \operatorname{sen} \omega \sqrt{g}\, t$$

La ecuación (4) escrita en la forma:

$$X'' + \frac{1}{x}\,X' + \frac{\omega^2}{x}\,X = 0$$

muestra cierta semejanza con la ecuación de Bessel, para $m = 0$.

Trataremos de reducirla a esta ecuación, mediante el cambio de variable;

$$x = a\, z^2 \qquad (5)$$

en que a es un parámetro que determinaremos.

Escribimos en seguida;

$$X' = \frac{dX}{dx} = \frac{dX}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$$

y como $dx = 2a\, z\, dz$

$$X' = \frac{1}{2az} \frac{dX}{dz} \qquad (6)$$

Además;

$$X'' = \frac{dX'}{dx} = \frac{dX'}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = \frac{1}{2az} \cdot \frac{dX'}{dz}$$

Pero de (6) sacamos;

$$\frac{dX'}{dz} = \frac{1}{2az} \cdot \frac{d^2x}{dz^2} - \frac{1}{2a\, z^2} \frac{dX}{dz}$$

$$X'' = \frac{1}{4a^2z^2} \left(\frac{d^2X}{dz^2} \cdot \frac{1}{z} \frac{dX}{dz}\right) \qquad (7)$$

Reemplazando entonces, los valores de (6) y (7) en la ecuación que intentamos resolver;

$$\frac{1}{4a^2\, z^2} \frac{d^2X}{dz^2} + \frac{1}{4a^2z^3} \frac{dX}{dz} + \frac{\omega^2}{a\, z^2} X = 0$$

o sea;

$$\frac{d^2X}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{dX}{dz} + 4a\,\omega^2\,X = 0 \qquad (8)$$

Para obtener la ecuación de Bessel, en su forma conocida, basta determinar a de modo que;

$$4a\,\omega^2 = 1$$

De aquí sacamos;

$$a = \frac{1}{4\omega^2}$$

y sustituyendo en (5), tenemos;

$$x = \left(\frac{2}{2\omega}\right)^2$$

o sea;

$$z = 2\omega\sqrt{x}$$

La ecuación (3) se reduce con esto a

$$\frac{d^2X}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{dX}{dz} + X = 0 .$$

y su solución, según se ha visto en el Capítulo: Funciones de Bessel, está dada por;

$$X = C_1\,J_0(z) + C_2\,Y_0(z)$$

es decir;

$$X = C_1\,J_0(2\omega\sqrt{x}) + C_2\,Y_0(2\omega\sqrt{x})$$

Debemos combinar esta ecuación con la solución de la ecuación (3), de modo que la función u, que buscamos, contenga cuatro constantes arbitrarias.

Escribiremos;

$$u = J_0(2\omega\sqrt{x})(A\cos\omega\sqrt{g}\,t + B\,\mathrm{sen}\,\omega\sqrt{g}\,t) +$$

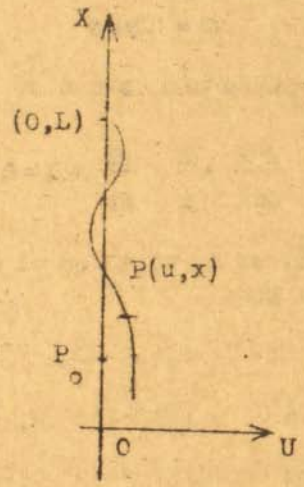
$$+ Y_o(2\omega\sqrt{x})(C\cos\omega\sqrt{g}\ t + D\ \text{sen}\ \omega\sqrt{g}\ t)$$

Debemos determinar, a continuación, las constantes de nuestra solución, lo que efectuaremos con ayuda de las condiciones iniciales y de las condiciones en los bordes.

Observemos, primeramente, que para $x = 0$, el valor de nuestra función u, debe permanecer finito.

Si recordamos que la función $Y_o(x)$ se hace igual a $-\infty$, para $x = 0$, deducimos que dicha función no debe intervenir en nuestra solución, por lo cual debe verificarse:

$$C = D = 0$$



de modo que:

$$u = J_o(2\omega\sqrt{x})(A\cos\omega\sqrt{g}\ t + B\ \text{sen}\ \omega\sqrt{g}\ t) \quad (9)$$

La condición en el borde superior será:

$$u = 0 \quad \text{para:} \quad x = L$$

con lo cual:

$$J_o(2\omega\sqrt{L})(A \cos\omega\sqrt{g}\, t + B \operatorname{sen}\omega\sqrt{g}\, t) = 0$$

Como esta ecuación debe verificarse para todos los valores de t, deben ser:

$$J_o(2\omega\sqrt{L}) = 0$$

De modo que:

$$2\omega\sqrt{L}$$

es una raíz de la ecuación:

$$J_o(x) = 0$$

Sea entonces: $x_n = 2\omega\sqrt{L}$

de donde:

$$\omega = \frac{x_n}{2\sqrt{L}} \qquad (10)$$

Recordemos ahora, que la ecuación:

$$J_o(x) = 0$$

tenía un número infinitamente grande de raíces, de modo que cada una de ellas va a producir una solución particular de la función u.

Reemplazando entonces ω en la ecuación (9), escribamos:

$$u_n = J_o\left(\frac{x_n}{L}\sqrt{x}\right)\left[A_n \cos \frac{x_n}{2}\sqrt{\frac{g}{L}}t + B_n \operatorname{sen} \frac{x_n}{2}\sqrt{\frac{g}{L}}\,t\right]$$

y en virtud del principio de superposición, establezcamos la solución general, en la forma:

$$u = \sum_1^{\infty} u_n$$

o sea:

$$u = \sum_1^{\infty} J_o\left(x_n\sqrt{\frac{x}{L}}\right)\left[A_n \cos \frac{x_n}{2}\sqrt{\frac{g}{L}}t + B_n \operatorname{sen} \frac{x_n}{2}\sqrt{\frac{g}{L}}\,t\right] \qquad (11)$$

Debemos determinar todavía, las constantes A_n y B_n. Para ello, establezcamos las condiciones iniciales:

Supongamos que para $t=0$ se verifica:

$$u = f(x)$$

y

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F(x) \qquad (12)$$

Derivando, entonces, la ecuación (11) parcialmente respecto a t:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_1^{\infty} J_o\left(x_n\sqrt{\frac{x}{L}}\right)\left[-A_n \frac{x_n}{2}\sqrt{\frac{g}{L}} \operatorname{sen} \frac{x_n}{2}\sqrt{\frac{g}{L}}\,t + B_n \frac{x_n}{2}\sqrt{\frac{g}{L}} \cos \frac{x_n}{2}\sqrt{\frac{g}{L}}t\right]$$

Haciendo t = 0 en esta última ecuación y en la ecuación (11) y teniendo en cuenta las ecuaciones (12), deducimos:

$$f(x) = \sum_1^\infty A_n \; J_o(x_n \sqrt{\frac{x}{L}})$$

$$F(x) = \frac{\sqrt{g}}{2\sqrt{L}} \sum_1^\infty B_n \; x_n \; J_o(x_n \sqrt{\frac{x}{L}}) \qquad (13)$$

Debemos investigar, ahora, si las funciones de Bessel que aparecen en estas sumas, son ortogonales.

Demostramos en el Capítulo de pág. 403 que si u y v, que aquí pondremos: x_n y x_m, eran raíces de la ecuación:

$$J_o(x) = 0$$

se verificaba:

$$\int_0^1 J_o(x_n \sqrt{s}) \cdot J_o(x_m \sqrt{s}) \, ds = 0$$

para $x_n \neq x_m$, y

$$\int_0^1 J_o^2(x_n \sqrt{s}) ds = J_1^2(x_n)$$

Hagamos en estas ecuaciones el cambio: $s = \frac{x}{L}$; $ds = \frac{dx}{L}$.

Obtenemos:

$$\frac{1}{L} \int_0^L J_o(x_n \sqrt{\frac{x}{L}}) \cdot J_o(x_m \sqrt{\frac{x}{L}}) \, dx = 0$$

$$\int_0^L J_o^2(x_n \sqrt{\frac{x}{L}}) dx = L \, J_1^2(x_n)$$

La primera de estas ecuaciones, muestra que las funciones que aparecen en las sumas (13), son efectivamente ortogonales en el intervalo (0,L), de modo que para calcular A_n, basta multiplicar la primera de las ecuaciones (13), escalarmente por: $J_o(x_n \sqrt{\frac{x}{L}})$ para obtener:

$$\int_o^L f(x) \cdot J_o(x_n \sqrt{\frac{x}{L}})\,dx = A_n \int_o^L J_o^2 (x_n \sqrt{\frac{x}{L}})\,dx$$

y después de reemplazar la última integral por su valor:

$$A_n = \frac{1}{L\, J_1^2(x_n)} \int_o^L f(x) \cdot J_o(x_n \sqrt{\frac{x}{L}})\,dx \quad (14)$$

Para calcular B_n, multiplicamos escalarmente por $J_o(x_n \sqrt{\frac{x}{L}})$ la segunda ecuación (13), y encontramos:

$$\int_o^L F(x) \cdot J_o(x_n \sqrt{\frac{x}{L}})\,dx = \frac{B_n x_n}{2} \sqrt{\frac{\xi}{L}} \int_o^L J_o^2 (x_n \sqrt{\frac{x}{L}})\,dx$$

de donde obtenemos después de reemplazar la última integral por su valor:

$$B_n = \frac{2}{x_n J_1^2 (x_n) \sqrt{\xi L}} \int_o^L F(x) \cdot J_o(x_n \sqrt{\frac{x}{L}})\,dx \quad (15)$$

La solución final de nuestro problema es, entonces:

$$u = \sum_{1}^{\infty} J_0(x_n \sqrt{\frac{r}{L}}) \left[A_n \cos \frac{x_n}{2} \sqrt{\frac{g}{L}}\, t + B_n \operatorname{sen} \frac{x_n}{2} \sqrt{\frac{g}{L}}\, t \right]$$

en que A_n y B_n, acaban de ser calculados.

VIBRACIÓN DE UNA MEMBRANA

Consideremos una membrana elástica, extendida sobre un marco circular de radio conocido.

Si en un instante dado, deformamos esta membrana, hasta hacerla adoptar la forma de una superficie conocida, cuya ecuación sea de la forma: $u = f(x)$, y luego la dejamos en libertad, ella comienza a vibrar, manteniéndose simétrica respecto al eje que pasa por su centro, en dirección perpendicular a su posición inicial, en virtud de la condición que hemos impuesto a la ecuación de la superficie, de depender solamente de la variable x.

Nos proponemos establecer la ecuación del sistema en movimiento, para lo cual deduciremos primeramente su ecuación diferencial.

Sea, para este objeto, u la masa de la membrana por unidad de superficie, y sean T y Tv, las componentes horizontales y vertical de la tensión tangencial radial, por unidad de longitud, a que está sometida la membrana.

Consideremos, entonces, sobre la superficie de la membrana, un anillo de espesor radial dx y situemos dos puntos P y Q sobre ella, de modo que se proyectan horizontalmente, sobre un mismo radio.

De condiciones puramente geométricas sacamos:

$$\frac{T_v}{T} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

o sea;

$$T_v = T \frac{u}{x}$$

Ahora, como estas tensiones, están referidas a la unidad de longitud, podemos afirmar, que la resultante de las tensiones verticales en el anillo de radio x, es:

$$\tau = 2\pi \quad x\, T \frac{\partial u}{\partial x} \qquad (1)$$

Al pasar del círculo de radio x, al de radio x + dx, dicha tension variará de una cantidad $d\tau$ que obtendremos diferenciando la expresión anterior;

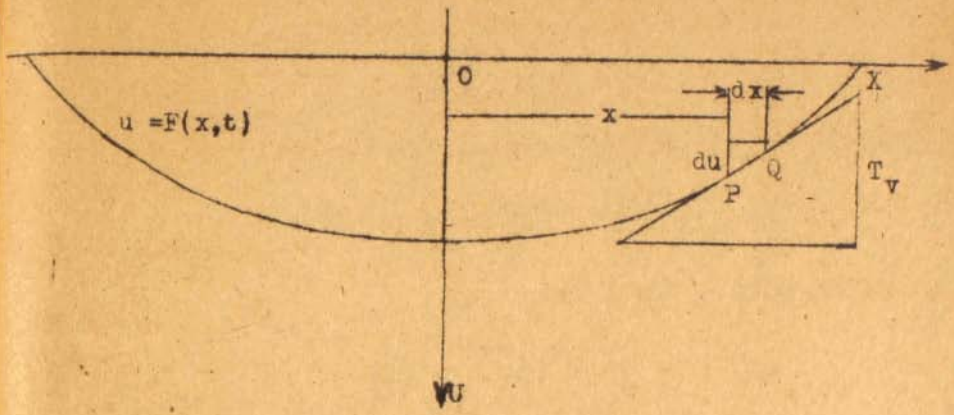
$$d\tau = 2\pi\, T \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(x \frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

Este será la expresión de la acción total de las tensiones producidas en el anillo de espesor radial dx, según la direccion vertical. Según el principio de Newton, debe cumplirse;

$$2\pi T \frac{\partial}{\partial x}\left(x \frac{\partial u}{\partial x}\right) \quad dx = 2\pi x \quad dx\, u \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

o sea;

$$x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{T}{u} \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(x \frac{\partial u}{\partial x}\right)$$



y desarrollando la derivada y luego dividiendo por x;

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left[\frac{T}{u} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \quad \frac{\partial u}{\partial x} \right]$$

donde pondremos para simplificar: $\frac{T}{u} = c^2$ encontrando como ecuación final;

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \quad \frac{\partial u}{\partial x} \right] \qquad (2)$$

Para resolver esta ecuación diferencial con derivadas parciales, supongamos que la función u, pueda expresarse en la forma;

$$u = X(x) \quad S(t)$$

Calculemos; $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = X \quad S''$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = X' \; S$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X'' \; S$$

y reemplacemos estos valores en la ecuación (2):

$$X \; S'' = c^2 (X'' \; S + \frac{1}{x} \; X' \; S)$$

Dividiendo, ahora, por X S:

$$\frac{S''}{S} = c^2 (\frac{X''}{X} + \frac{1}{x} \; \frac{X'}{X})$$

Observaremos que el primer miembro es solamente función de la variable t, mientras el segundo lo es sólo de x. Siendo ambas variables, independientes, entre sí, dicha ecuación sólo puede verificarse, si ambos miembros son iguales a una constante, que supondremos negativa, como en otros problemas de la misma especie.

Tendremos:

$$\frac{S''}{S} = c^2 (\frac{X''}{X} + \frac{1}{x} \; \frac{X'}{X}) = - \omega^2$$

de donde sacamos:

$$S'' + \omega^2 \; S = 0 \qquad (3)$$

$$\frac{X''}{X} + \frac{1}{x} \; \frac{X'}{X} + \frac{\omega^2}{c^2} = 0$$

$$\frac{\omega}{c} = k$$

y dando forma entera:

$$X'' + \frac{1}{x} X' + k^2 X = 0 \qquad (4)$$

La ecuación (3) tiene por solución:

$$S = A_1 \cos \omega t + A_2 \operatorname{sen} \omega t$$

Transformaremos la ecuación (4), por medio del cambio de variable:

$$z = k x \quad ; \quad dz = k \, dx$$

Entonces: $$X' = \frac{dX}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = k \frac{dX}{dz}$$

$$X' = k \frac{d^2X}{dz^2} \cdot \frac{dz}{dx} = k^2 \frac{d^2X}{dz^2}$$

y reemplazando en la ecuación:

$$\frac{d^2X}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{dX}{dz} + X = 0$$

que es la ecuación de Besseh para $\underline{m} = 0$.

Su solución, es por tanto:

$$X = C_1 J_o(z) + C_2 Y_o(z)$$

es decir: $$X = C_1 J_o(k x) + C_2 Y_o(k x)$$

y combinando esta ecuación con la solución de (3), obtenemos la ecuación con 4 constantes en la forma:

$$u = J_o(k x)(A \cos \omega t + B \operatorname{sen} \omega t) + Y_o(k x)(C \cos \omega t + D \operatorname{sen} \omega t)$$

Estableceremos las condiciones en los bordes, y las condiciones iniciales. En primer término, observemos que para $x = 0$, debemos obtener un valor finito, para nuestra función u. Esto exige: $C = D = 0$, ya que la aparición de la función $Y_o(k\,x)$ en la solución, daría un valor infinitamente grande de u, para $x = 0$.

Si tratásemos el caso de una membrana anular, se tendría: $C \neq D \neq 0$, y la función $Y_o(k\,x)$ aparecería en la solución; para determinar las constantes, observaríamos que en este caso existirían condiciones para el borde interior del arillo.

Volviendo al caso presente, tendríamos, con estos valores de C y D:

$$u = J_o(dk\,x)(A \cos \omega t + B \operatorname{sen} \omega t)$$

Nos falta determinar las constantes A, B y k.

Impondremos la condición de velocidad nula en el instante inicial.

Calculamos:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = J_o(k\,x)(-A\,\omega \operatorname{sen} \omega t + B\,\omega \cos \omega t)$$

y haciendo $t = 0$, obtenemos:

$$\omega B\ J_o(k\,x) = 0$$

y como

$$\omega J_o(k\,x) \neq 0$$

nos resulta $B = 0$, con la cual la solución se reduce a:

$$u = A\,J_o(k\,x) \cos \omega t \qquad (6)$$

Para determinar k, observamos que u = 0, para x = R, siendo R el radio del marco sobre el cual va fija la membrana.

Entonces:

$$A\, J_0 (k\, R) \cos \omega t = 0$$

y como esta ecuación debe verificarse para todo valor de t:

$$J_0 (k\, R) = 0$$

lo que muestra que k R es una raíz de la ecuación:

$$J_0(x) = 0$$

Sea entonces: $k\ R = x_n$

de donde sacamos: $k = \frac{x_n}{R}$

y como definimos: $k = \frac{\omega}{c}$

deducimos: $\omega = \frac{x_n\, c}{R}$

Tratemos de determinar las primeras frecuencias propias de la vibración de la membrana.

Debemos descender momentáneamente a un caso particular, fijando valores numéricos a las cantidades conocidas del problema.

Supongamos que: $R = 40$ cm.

$$T = 14{,}7 \cdot 10^4 \ \frac{\text{dinas}}{\text{cm}}$$

$$u = 0{,}3 \ \frac{\text{gr}}{\text{cm}^2}.$$

Con estos valores, nos resulta:

$$c^2 = \frac{T}{u}\ 49 \cdot 10^4 \frac{cm^2}{seg^2}$$

o sea:

$$c = 700 \frac{cm.}{seg.}$$

que muestra que la constante c tiene las dimensiones de una velocidad.

Sabemos que las frecuencias tienen por expresión:

$$\nu_n = \frac{\omega_n}{2\pi}$$

o sea:

$$\nu_n = \frac{c}{2\pi R} x_n = 2,786\ x_n$$

Ahora bien, La ecuación $J_o(x) = 0$ tiene primeras raíces:

$$x_1 = 2,405$$
$$x_2 = 5,52$$
$$x_3 = 8,654$$
$$x_4 = 11,792$$

con lo cual:

$\nu_1 = 6,7$ $\qquad$ $\nu_3 = 24,1$

$\nu_2 = 15,4$ $\qquad$ $\nu_4 = 32,8$

Volviendo al caso general, sustituímos los valores de $\underline{k}$ y de ω_n, en la ecuación (6) obteniendo:

$$u_n = A_n \, J_o\left(\frac{x_n}{R} x\right) \cos \frac{x_n c}{R} t \qquad (7)$$

Como u_n constituye una solución particular de la ecuación diferencial de la membrana, podemos dar a la solución general, la forma:

$$u = \sum_1^\infty u_n$$

y reemplazando u_n, de (7)

$$u = \sum_1^\infty A_n \, J_o\left(\frac{x_n}{R} x\right) \cos \frac{x_n c}{R} t \qquad (8)$$

Para determinar A_n, recordemos que en el instante inicial, la ecuación de la superficie esté dada por;

$$u = f(x)$$

de modo que haciendo $t = 0$, en la ecuación (8), se tiene:

$$f(x) = \sum_1^\infty A_n \, J_o\left(\frac{x_n}{R} x\right)$$

Escribamos, ahora, las fórmulas (5) y (6) de pág. 290 (Funciones de Bessel), en variable s, y aplicadas al caso $m = 0$:

$$\int_0^1 J_o(x_n s) \, J_o(x_r s) \, ds = 0$$

$$\int_0^1 s \, J_o^2(x_n s) \, ds = \frac{1}{2} J_o'^2(x_n) = \frac{1}{2} J_1^2(x_n)$$

Hagamos en estas fórmulas el cambio de variable: $s = \frac{x}{R}$; $ds = \frac{dx}{R}$.

Encontramos $$\int_0^R x\, J_o(\frac{x_n}{R} x)\, J_o(\frac{x_m}{R} x)\, dx = 0 \qquad (9)$$

$$\int_0^R x\, J_o^2(\frac{x_n}{R} x)\, dx = \frac{R^2}{2} J_1^2(x_n) \qquad (10)$$

Volviendo a la ecuación:

$$f(x) = \sum_1^\infty A_n\, J_o(\frac{x_n}{R} x)$$

vemos que si consideramos el intervalo $(0,R)$, y multiplicamos esta ecuación escalarmente por:

$$x\, J_o(\frac{x_n}{R} x)$$

en dicho intervalo, obtenemos:

$$\int_0^R x\, f(x)\, J_o(\frac{x_n}{R} x) = A_n \int_0^R x\, J_o^2(\frac{x_n}{R} x)\, dx$$

y despejando A_n, después de reemplazar el valor de esta última integral:

$$A_n = \frac{2}{R^2 J_1^2(x_n)} \int_0^R x\, f(x)\, J_o(\frac{x_n}{R} x)\, dx \qquad (11)$$

Las fórmulas (8) y (11), constituyen, por tanto, la solución del problema.

- ooo -

I N D I C E

FUNCIONES EULERIANAS: 1
Generalidades..... 1
Función Beta..... 1
Función Gamma..... 5
Relaciones de las Funciones Beta y Gamma..... 12
Cálculo de la Función Gamma..... 14

APLICACIONES DE LAS FUNCIONES EULERIANAS: 21
Aplicaciones..... 23

INTEGRALES DEFINIDAS: 29
A.- Cambio de variable de integración..... 30
Aplicaciones..... 30
B.- Diferenciación bajo el signo integral..... 37
C.- Formación de integrales dobles. 47
D.- Desarrollo en serie de funciones sub-integrales..... 53
E.- Aplicación de las funciones de variable compleja..... 57

CALCULO DE VARIACIONES: 67
Generalidades..... 67
Determinación de la función y(x)... 71
Casos especiales..... 74
Aplicaciones..... 78
Braquistócrona..... 79
Problema Isoperimétrico..... 81

T E R C E R A P A R T E

ECUACIONES DIFERENCIALES

RESOLUCION NUMERICA DE ECUACIONES DIFERENCIALES: 91

La ecuación $\frac{dy}{dx} = F(x)$..... 91

La ecuación $\frac{dy}{dx} = F(x,y)$..... 93

OBTENCION DE LA SOLUCION DE LA ECUACION CON MAYOR PRECISION: 101
Sistema de ecuaciones..... 104

RESOLUCION GRAFICA DE ECUACIONES DIFERENCIALES: 105
Diferenciación gráfica..... 105

INTEGRACION GRAFICA DE ECUACIONES DIFERENCIALES : 115
Puntos de inflexión..... 122

RESOLUCION DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES:

CON COEFICIENTES CONSTANTES: 129
Operador (D - a)..... 132
Operador D^2 - (a+b)D+a b..... 142

RESOLUCION DE ECUACIONES DIFERENCIALES POR MEDIO DE SOLUCIONES PARTICULARES: 163
Generalidades..... 163
Ecuaciones diferenciales de Segundo Orden..... 163
Aplicaciones..... 168

RESOLUCION DE ECUACIONES DIFERENCIALES POR MEDIO DE DESARROLLOS EN SERIE: 181
Generalidades..... 181
Ecuaciones diferenciales lineales de Segundo Orden..... 182
Aplicación..... 184
Soluciones..... 186
Aplicación..... 187
Soluciones en serie de potencias generalizadas..... 192
Aplicación..... 194
Solución en desarrollo finito..... 205
Aplicación..... 205

FUNCIONES DE BESSEL: 209
a) Caso m = 0 211
b) Caso m = 1/2 212
c) Caso general: m entero; La Función de primera especie y de orden m.. 214
Función de orden cero..... 217
Función de Primer Orden..... 217
Relaciones entre las funciones de distintos Ordenes. Fórmulas de recurrencia..... 219

Integrales de Bessel..... 222
Aplicaciones..... 223
Aplicacion de la Funcion Gamma a la Función de Bessel de primera especie..... 226
Aplicaciones..... 229
Ortogonalidad de funciones de Bessel 247
Cálculo numérico de Funciones de Bessel..... 255

C U A R T A P A R T E

ECUACIONES CON DERIVADAS PARCIALES DE LA FISICA MATEMATICA: 259

LA CUERDA VIBRANTE: 261
Vibracion con tensión constante..... 264

VIBRACION CON TENSION VARIABLE: 273
Caso de la cadena..... 273

VIBRACIÓN DE LA MEMBRANA: 285

I N D I C E; 295