UNIVERSIDAD DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERIA

Complemento de Matemáticas Superiores

(PURAS Y APLICADAS)

TOMO I

Prof. CARLOS GRANDJOT R.

Redactores:
LUIS COURT M. — JORGE SILVA M.

APUNTES DE CLASES

EDITORIAL UNIVERSITARIA, S. A.
1957

UNIVERSIDAD DE CHILE

ESCUELA DE INGENIERIA

COMPLEMENTO DE MATEMATICAS SUPERIORES

(PURAS Y APLICADAS)

Tomo I

Prof.

CARLOS GRANDJOT R.

Redactores

Luis Court M. - Jorge Silva M.

1957

EDITORIAL UNIVERSITARIA, S. A.

Ricardo Santa Cruz 747, Teléfono 36252, Casilla 10220, Santiago

P R O L O G O

Al decidirnos a ordenar en este volumen las diversas materias que el profesor Sr. Carlos Grandjot ha desarrollado, a través de los años en que ha dictado su Cátedra en las Escuelas de Ingeniería de las Universidades de Chile y Católica, ha sido nuestro principal objetivo el de simplificar a nuestros compañeros el estudio un tanto difícil, pero siempre interesante del curso de "Complementos de Matemáticas Superiores".

El libro ha sido dividido en cuatro partes destinadas a agrupar entre sí los elementos homogéneos del curso de Complementos.

Así, la primera parte: "Métodos Numéricos y Gráficos" está destinada a instruir a los alumnos en el uso y conocimiento de numerosos métodos de matemáticas aplicadas y que son complemento indispensable de las matemáticas puras estudiadas en los años anteriores.

La segunda parte; "Estudios Funcionales" tiene como objeto poner en contacto a los estudiantes con tipos superiores de funciones, que les serán de gran utilidad en el estudio y resolución de los problemas de la Física Moderna.

La tercera parte: "Ecuaciones Diferenciales" constituye un capítulo destinado a complementar con métodos especiales, de orden práctico, los estudios de ecuaciones

diferenciales realizados en el curso de Análisis Infinetesimal.

Por último, la cuarta parte: "Ecuaciones con derivadas parciales de la Física Matemática", es una aplicación a problemas de la Física de las materias pasadas en los capítulos anteriores del libro.

No nos habría sido posible lograr la publicación de estos apuntes sin la desinteresada ayuda de los compañeros, tanto de la Universidad de Chile como de la Católica, que amablemente accedieron a facilitarnos los apuntes tomados a nuestro profesor en años anteriores al nuestro. A todos ellos manifestamos, por medio de estas páginas, nuestro más sincero agredecimiento.

Dedicamos este libro a nuestro profesor Dr. Carlos Grandjot, sin cuyo incondicional apoyo e inapreciable ayuda no habríamos podido llegar al resultado que hoy les presentamos.

Luis Court Moock Jorge Silva Matte

Santiago, Junio de 1950.

P R E F A C I O

Al entregar al público los apuntes de mis clases de Complementos de Matemáticas Superiores redactados por lo demás en muy buena forma por los señores Luis Court y Jorge Silva no lo hago sin cierta hesitación, por temor a la impresión desfavorable que podría producir la imperfección de una publicación hecha a base de apuntes de clase; pues, para la palabra hablada rigen otras normas que para la palabra escrita.

Pero en bien de mis estudiantes no puedo retardar más la entrega de esta obra. Espero les sea de utilidad particularmente en vista de la dificultad constante que tienen en encontrar literatura de cómodo acceso para complementar sus estudios.

Expreso la esperanza de que la presente obra no sólo les facilite el aprendizaje de los temas obligatorios del progreso, sino que despierte el interés por las matemáticas y sus aplicaciones o lo haga extensivo a temas menos conocidos, en provecho de la ciencia actual y futura. Además creo que les ofrezco un texto de consulta para toda su carrera, un libro, pues, que no conviene revender al final del año en que se cursa Complementos de Matemáticas Superiores.

Por las últimas razones me parece que la obra podrá encontrar amigos entre todos los que tienen gusto por

las Matemáticas. Vaya dirigida a ellos una breve advertencia: Por la posición intermedia entre las Matemáticas puras y aplicadas he tenido que buscar una solución prudente al problema del rigor de las deducciones. De hecho he tratado de no sacrificarlo totalmente en bien de la comodidad o del apuro con que el Ingeniero desea llegar a resultados de aplicabilidad inmediata.

Deseo finalmente, que el lector comprenda que no he podido dar teorías completas; sirva el libro más bien para la iniciación al estudio de las Matemáticas "no desinteresadas".

Dr. Carlos Grandjot

Santiago, Junio de 1950.

METODOS Y REGLAS DEL CALCULO NUMERICO

En este capítulo veremos algunos temas independientes entre si, pero que tienen relación con el cálculo numérico.

REDONDEO:

Cuando se quiere calcular alguna cantidad, se le exige a ésta cierto número de cifras decimales o bien de cifras significativas. Si se tienen más de las necesarias hay que recurrir a redondear dicha cantidad. Las reglas por las cuales se rige el redondeo son:

"Cuando la cifra por redondear es menor que 5, se aproxima a la cifra que antecede a la que redondear. Si la cifra por redondear es mayor que 5 se aproxima a la cifra superior a la que la antecede. Por último, si la cifra es 5 se procede de tal modo que la última cifra que se escribe sea par".

Veamos algunos ejemplos:

Queremos redondear: 7.126.87

se tiene: 7.126,9

7.127

Si queremos redondear:

0,14321

tenemos: 0,1432

0,1432

0,14

Para redondear;

3,1415 hacemos 3,142

3,1465 hacemos 3,146

OPERACIONES CON NUMEROS CERCANOS A LA UNIDAD:

Sean δ y ε cantidades positivas o negativas pequeñas comparadas con la unidad.

Tenemos:

$$(1 + \delta)(1 + \varepsilon) \approx 1 + \delta + \varepsilon$$

puesto que $\delta\varepsilon$ será despreciable. (El signo $\approx$ se lee "aproximadamente igual).

Así, por ejemplos:

1,0038 . 4,0014 = 1,0052

1,05 . 0,97 = 1,02

1,04 . 0,96 = 1,00

Particularmente si tenemos:

$$\delta = -\varepsilon$$

Se verifica:

$$(1 + \varepsilon)\,(1 - \varepsilon) \approx 1$$

de la cual obtenemos:

$$\frac{1}{1 + \varepsilon} \approx 1 - \varepsilon$$

Por lo tanto se verifica que:

$$(1 + \delta) : (1 + \varepsilon) \quad 1 + \delta - \varepsilon$$

Ejemplos:

$$\frac{1}{1,00096} = 0,99904$$

$$\frac{1}{0,92} = 1,08$$

$$1,0035 : 1.0053 = 0,9982$$

$$0,008 : 0,997 = 1,015$$

Por último tenemos:

$$(1 + \delta)^2 \approx 1 + 2\delta$$

$$\sqrt{1 + \delta} \approx 1 + \frac{1}{2}\delta$$

Por ejemplo:

$$0,992^2 = 0,984$$

$$\sqrt{0,9986} = 0,9993$$

$$\sqrt{15,967} = 4\sqrt{1 - 0,002} = 4(1 - 0,001) = 3,996$$

ESCRITURA DE DATOS OBTENIDOS EN EXPERIENCIAS:

En los datos obtenidos en experiencias no es lícito agregar a las cifras, ceros a continuación de las cifras significativas. O sea, por ejemplo:

$$3{,}6 \neq 3{,}600$$

Esto se debe a que el operador al colocar el valor 3,6 quiere indicar que el valor está comprendido entre 3,55 y 3,65. En cambio si se coloca 3,600 quiere indicar que está comprendido entre los valores 3,5995 y 3,6005, lo que como se comprende es muy diferente.

Se puede escribir simbólicamente:

$$x = 3{,}6 \pm 0{,}05$$

en vez de: $3{,}55 < x < 3{,}65$

PRECISION EN LAS OPERACIONES CON CANTIDADES NUMERICAS:

1) Suma y resta: Sean dos cantidades a y b. Designemos sus errores absolutos por Δa y Δb.

Si sumamos:

$$\begin{array}{rcl} a & \pm & \Delta a \\ b & \pm & \Delta b \\ \hline a + b & \pm & (\Delta a \pm \Delta b) \end{array}$$

restando:

$$\begin{array}{rcl} a & \pm & \Delta a \\ b & \pm & \Delta b \\ \hline a - b & \pm & (\Delta a + \Delta b) \end{array}$$

Luego al sumar y restar se suman los errores absolutos.

2) Error relativo: Error relativo de una cantidad es la razón entre su error absoluto y la cantidad medida. O sea lo definimos como:

$$\varepsilon = \frac{\Delta a}{a}$$

Se tiene:

$$a \pm \Delta a = a\left(1 \pm \frac{\Delta a}{a}\right)$$

Por ejemplo si tenemos:

$$433{,}8 \pm 0{,}3 = 433{,}8\ (1 \pm 0{,}0007) = 433{,}8 \pm 0{,}7\ ^{o}/_{oo}$$

el error relativo es 0,0007.

Por lo tanto, del error absoluto se pasa al relativo dividiendo por a; del relativo al absoluto se pasa multiplicando por a.

Veremos otro ejemplo para observar la variación del error relativo.

Si se tiene:

$$100 \pm 0{,}5 = 100(1 \pm 0{,}005) = 100 \pm 5\ ^{o}/_{oo}$$

$$9{,}99 \pm 0{,}5 = 9{,}99(1 \pm 0{,}05) = 9{,}99 \pm 50\ ^{o}/_{oo}$$

En el primer caso el error relativo es del 5 por mil y en el segundo es del 5 por ciento.

En general, con tres cifras significativas el error relativo es del orden del 1; 1.000 y con n cifras signi-

-ficativas es del orden de 10^{-n}.

3) Multiplicación: Sea el producto de dos cantidades:

$$(a \pm \Delta a)(b \pm \Delta b) = a\,b \pm (a\,\Delta b + b\,\Delta a)$$

$$= a\,b\left[1 \pm \left(\frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}\right)\right]$$

Luego, al multiplicar dos cantidades se suman sus errores relativos.

4) División: Tenemos:

$$\frac{a \pm \Delta a}{b \pm \Delta b} = \frac{a}{b}\left[1 \pm \left(\frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}\right)\right]$$

O sea al dividir también se suman los errores relativos.

De 3) y 4) y tomando en cuenta lo dicho al final de 2) se desprende la conveniencia de que los dos términos de un producto o cuociente tengan igual número de cifras significativas, y que el resultado no podrá tener más cifras que los factores.

5) Potencias: Supóngase

$$(a \pm \Delta a)^2$$

Se tiene: $(a \pm \Delta a)^2 = a^2 \pm 2\,a\,\Delta a + (\Delta a)^2$

$(\Delta a)^2$ = despreciable,

luego: $$(a \pm \Delta a)^2 = a^2\left(1 \pm 2\,\frac{\Delta a}{a}\right)$$

De igual modo:

$$\sqrt{a \pm \Delta a} = \sqrt{a}\left(1 \pm \frac{1}{2}\,\frac{\Delta a}{a}\right)$$

OBTENCION RAPIDA DE RESULTADOS:

Veremos aquí como obtener rápidamente el resultado cuando se multiplican entre sí ciertas cantidades.

Elevación al cuadrado de números terminados en 5: Sea un número (10 a + 5) cuyo cuadrado queremos obtener.

Se tiene:

$$(10\,a + 5)^2 = 100\,a^2 + 100\,a + 25$$

$$= 100\,a(a + 1) + 25$$

Luego mentalmente podemos obtener el resultado dmltiplicando la cifra a por la que le sigue (a + 1) y agregándole 25 a la derecha.

Por ejemplo:

$$65^2 = 42\ \ 25 = 4.225.$$

Apoyándonos en este mismo método podemos resolver mentalmente el siugiente producto:

$$67 \cdot 63 = (65 + 2)(65 - 2) = 65^2 - 4 = 4.221$$

Elevación al cuadrado de números por desarrollo del binomio:

Sea, por ejemplo, elevar al cuadrado 47.

$$47^2 = (40 + 7)^2 = 1.649 + 550 = 2.209$$

o bien

$$47^2 = (50 - 3)^2 = 2.509 - 300 = 2.209$$

OPERACIONES ABREVIADAS:

Cuando trabajamos con cantidades cuyas cifras decimales son aproximadas o de las cuales no tenemos seguridad podemos hacer más breves las operaciones tales como multiplicar, dividir y extraer raíz. A continuación veremos algunos métodos para trabajar con esas cantidades en forma abreviada.

1) MULTIPLICACION:

Supóngase que queremos multiplicar 60, 79 por 4,133.

Se tiene:

$$\begin{array}{r} 60,79 \\ \hline 243,16 \\ 6\ 079 \\ 1\ 8237 \\ 12158 \\ \hline 251\ 18428 \end{array} \quad . \quad 4,132$$

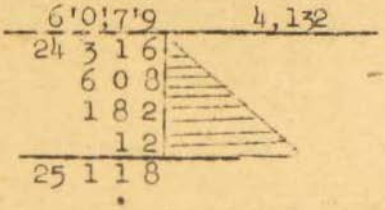
En vez de multiplicar normalmente, multiplicamos 60,79 por 4, luego por 1, por 3, y finalmente por 2, corriéndonos a cada nueva multiplicación una cifra a la derecha con el número inicial.

El resultado tendrá tres cifras enteras (60 . 4 = 240) y calcularemos dos cifras decimales.

Luego, si en la primera corrida contamos 5 cifras (3 enteras y 2 decimales) y de allí bajamos una vertical, todas las cifras situadas a la izquierda de ella tendrán influencia en el resultado salvo a lo que a reserva de cantidades se refiere.

La multiplicación la empezamos al revés (comen-

-zando por el 4) dado que es este producto el que más importancia tiene en el resultado por dar las cifras de más a la izquierda. Luego para evitar la pérdida de tiempo del caso anteruor procedemos como sigue:

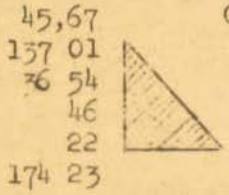


Multiplicamos 60,79 por 4 y anotamos entero el resultado. Luego multiplicamos por 1, pero colocamos un acento entre el 7 y el 9 para indicar que ahora comenzamos por el 7 en vez del 9, pero aproximando la primera cifra. Luego multiplicamos por 3 colocando un acento entre el 0 y el 7 para indicar que partimos del 0 pero considerando que 3 . 7 = 21 y que hay de reserva 2, colocamos este número en vez de 0. De igual modo se procede hasta terminar la operación.

Su resultado es:

$$60,79 \cdot 4,133 = 251,2$$

Veamos otro caso como ejemplo.



Luego:

$$45,67 \cdot 0,3815 = 17,42$$

2) División.- Se abrevia en forma similar que para la multiplicación. En vez de agregar ceros al divi-

-dendo, se divide cada vez por 10 el divisor. Para ilustrar el método veremos algunos ejemplos,

60,79 : 4;1'3'3 = 14,71
19 46
2 94
04
0

Dividimos 60,79 por 4,133. Está contenido sólo 1 vez. Queda 1946. Esta cantidad la dividimos por 443. Está contenido 4 veces y sobra 293. Esto lo dividimos por 1 y así queda terminar la división.

Veremos otro ejemplo:

1,000000 : 3'6'5 = 0,00273976
2 700
1450
3550
265
23
1

3) Extracción de raíz cuadrada: Este caso es enteramente similar a los anteriores. La abreviación consiste que en lugar de bajar dos ceros cuando comienzan las cifras decimales, se divide el divisor correspondiente por $\sqrt{100}$ o sea 10.

Veamos un ejemplo.

$\sqrt{10.000000} = 3,162$
1 00 : 61
390'0 : 626
14 400 : 6322
1 756

según la teoría deberíamos seguir:

17560'0 : 6324

en vez de esto no se agregan los dos ceros al dividendo sino que se suprime la última cifra del divisor. O sea:

1 756 : 6'3'2'4 = 278
491
48
00

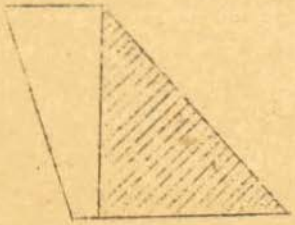
Luego: $\sqrt{10} = 3,162278$

Veamos otro ejemplo:

$\sqrt{1'34'54'07} = 1.159,917$
34 : 21
13 54 : 225
2 29 07 : 2309
21 2600 : 2318
40
17

En el divisor de la cuarta línea debía ir un 9 al final, pero no lo ponemos ya que en vez de agregar los dos ceros al dividendo, dividimos por 10 el divisor. Luego se sigue dividiendo en la forma indicada anteriormente.

Luego en el esquema de la extracción de raíz se evita la parte achurada.



COMPLEMENTO A UN NUMERO:

Este método se usa para restar una cantidad cualquiera a una cantidad formada por una cifra significativa seguida de ceros.

Veamos un ejemplo:

$$\begin{array}{r} 500.000 \\ -\ 64.307 \\ \hline 435.693 \end{array}$$

Se escriben los números de izquierda a derecha. O sea primero se escribe el 4 y luego debajo del 6 se coloca una cifra tal que sumada con éste de 9 (o sea 3). Debajo del 4 se coloca una cifra de modo que la suma de 4 más la cifra, dé 9 (o sea 5). Así se sigue hasta llegar a la última en la cual las dos cifras deben sumar 10.

Esto se llama buscar complemento a un número.

Sea el caso de un logaritmo.

$$-(\bar{2}.30102)$$

o sea:

$$\begin{array}{r} -\ 2.00000 \\ +\ 0.30102 \\ \hline -\ 1.69898 \end{array}$$

luego:

$$-(\bar{2}.30102) = 1.69898$$

Supóngase que queremos calcular la expresión

$$\frac{a^2\ b}{c\ \ d}$$

Tomando logaritmo tenemos:

$$2 \log\ a + \log\ b - \log c - \frac{1}{2} \log d$$

Calculando obtenemos:

log a = 2,567	5,134
log b = 1,340	1,340
log c = 2,099	$\bar{3}$,901
log d = 0,832	$\bar{1}$,584
	3,959

suponiendo que los valores arriba nombrados sean dados.

Como log c y $\frac{1}{2}$ log d deben restarse tomamosc complemento a 3 y 1 para dejar mantisas positivas y darle el signo a la característica. Luego sumando se obtiene el resultado.

$$\log \frac{a^2 b}{c \sqrt{d}} = 3.959$$

E S C A L A S F U N C I O N A L E S

REGLA DE CALCULO

REPRESENTACION DE UNA FUNCION POR UNA ESCALA:

Supóngase la función

$$f(u) = u^2$$

Formemos la tabla:

u =	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
u^2 =	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

Luego sobre un eje O X midamos desde el origen O, y en una escala arbitraria longitudes iguales a $x = u^2$. En cada una de las rayas colocamos el valor correspondiente a u en vez del u^2. Esto se ha efectuado más abajo tomando como escala m = 1 cm. Esto se llama representar u^2 por una escala.

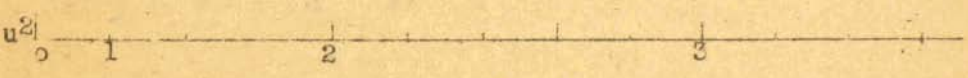


Fig. 1

En general, toda función f(u) de una variable u, puede ser representada por una escala. Sea

$$u = u_1 \quad u_2 \quad u_3 \ldots$$

$$f(u) = f(u_1) \quad f(u_2) \quad f(u_3)$$

Si sobre un eje O X dibujamos desde el origen longitudes iguales a $x = f(u)$ y cada división la marcamos con el valor de u se dice que la Fig. 2 representa la función f(u) por una escala.

f(u)

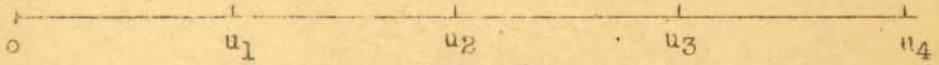


Fig. 2

La escala uniforme es un caso especial en la cual f(u) = u, Fig. 3.

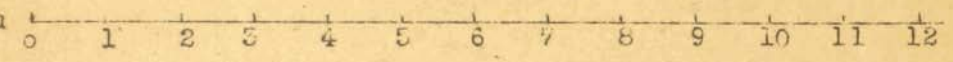


Fig. 3

Entre las funciones más importantes se cuenta la función logarítmica definida por:

$$f(u) = \log u$$

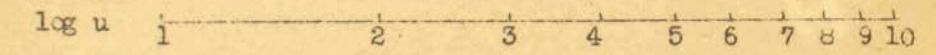


Fig. 4

Una vez marcada la escala en los valores principales, para estimar los valores de u entre marca y amarca hay que recurrir a la interpolación a ojo.

ESCALAS FIJAS:

Se puede representar una relación entre dos va-

-riables de la forma v = f(u) dibujando dos escalas v y f(u) a ambos lados de un mismo eje o bien en ejes paralelos, usando la misma escala y midiendo las distancias desde un mismo origen.

Veamos un ejemplo. Si C son grados centígrados y F grados Fahrenheit, se tiene; 1.8 C = F - 32.

Dibujamos las escalas uniformes

$$x = (F - 32) \quad y \quad x = (1.8\ C)$$

a ambos lados de un mismo eje y desde el mismo origen. (Fig. 5).

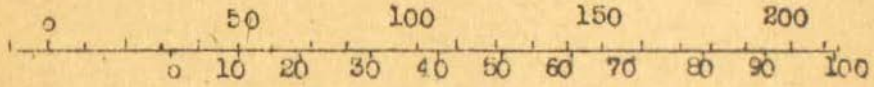


Fig. 5

Los puntos marcados con C = 0 y F = 32 coinciden. Por medio deesta figura nosotros podemos convertir grados centígrados a Fahrenheit y viceversa.

ESCALAS DESLIZABLES:

Sean dos funciones f(u) y F(v) y dibujemos sus escalas f(u) y F(v). Si esas escalas se colocan adyacentes con sus orígenes coincidiendo, entonces para cualquier par de valores u y v opuestos se tiene; (Fig. 6a).

$$O\,A = O'B$$

o sea

$$\boxed{f(u) = F(v)} \qquad (1)$$

esta posición la llamamos "posición principal" y es la que hemos tratado en el párrafo precedente.

Si ahora una de las escalas se desliza sobre la otra en "d" unidades, entonces para cualquier par de valores de u y v opuestos tenemos (fig. 6b).

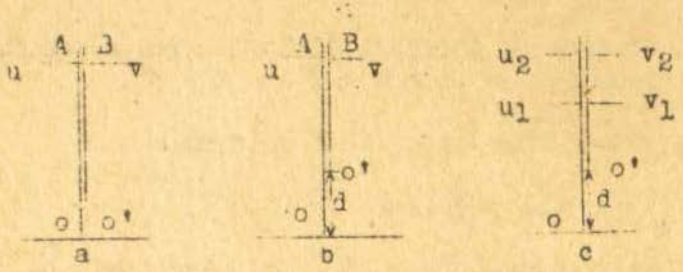


Fig. 6

$$O A - O'B = d$$

o bien:
$$f(u) - F(v) = d = C^{te}. \qquad (2)$$

Si u_1, v_1 y u_2 v_2 son dos pares de valores de u y v opuestos (Fig. 6c) podemos poner:

$$\boxed{f(u_1) - F(v_1) = f(u_2) - F(v_2)} \qquad (3)$$

Veamos, por ejemplo, las escalas $x = \log u$ y $x = \log v$. Si estas escalas se colocan adyacentes, entonces en la posición principal se tiene según (1)

$$\log u = \log v$$

o sea:
$$u = v$$

(Ver fig. 7 en la pág. sig.)

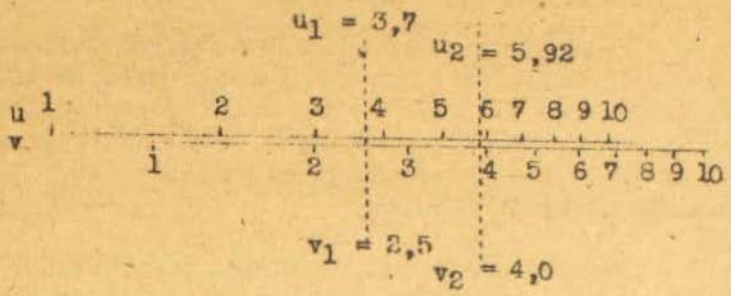


Fig. 7

Si las hacemos deslizar, según (2) tenemos:

$$\log u - \log v = C^{te}$$

de donde:

$$\log \frac{u}{v} = C^{te}$$

o sea:

$$\frac{u}{v} = C^{te}$$

y según (3) podemos poner:

$$\frac{u1}{v1} = \frac{u2}{v2}$$

Luego si conocemos cualquiera de las tres cantidades podemos conocer de inmediato la cuarta cantidad. Así si se dan u_1, v_1, u_2 las escalas se hacen deslizar hasta poner frente a frente u_1 y v_1 y en seguida se lee el valor v_2 opuesto a u_2. Un ejemplo de esto se ve en la Fig. 7:

$$\frac{3.7}{2.5} = \frac{5.92}{4.00}$$

REGLA DE CALCULO:

Este instrumento está formado por varias escalas logarítmicas paralelas y una escala uniforme. La regla consta de dos partes: el cuerpo, que constituye la parte fija y la reglilla que constituye la parte móvil. Para trabajar se usa el llamado curso que sirve para comparar los valores opuestos en las diversas escalas.

Las escalas se designan con las letras A, B, C..... y los números en dichas escalas los designaremos por las letras a,b,c..... respectivamente. La mayoría de las reglas de cálculo tienen las siguientes escalas (Fig. 8).

L : l C : log c D : log d

A : $\frac{1}{2}$ log a B : $\frac{1}{2}$ log b CI : log $\frac{10}{c}$

K : $\frac{1}{3}$ log k S : $\frac{1}{2}$ log (100 sen s) T : log(10 tg t)

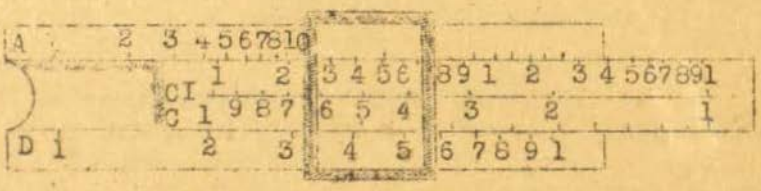


Fig. 8

Los resultados se leen sin la coma, la que se determina después por un cálculo a ojo.

Haremos a continuación un estudio de la forma

de proceder para trabajar con las escalas tanto en la posición principal como en las demás. La primera posición la marcaremos con 1) y las otras con 2):

1) Escalas L y D:

1) $l = \log d \quad y \quad d = 10^l$

2) Escalas C y D o A y B.

1) $\log c = \log d$ o sea $c = d$

2) $\log c - \log d = C^{te}$

luego: $\frac{c}{d} = C^{te}$

o también $\frac{c_1}{d_1} = \frac{c_2}{d_2}$

luego se deduce que $\frac{c}{d}$ debe ser constante a lo largo de toda la reglilla.

Estas escalas son las que se usan para multiplicar y dividir.

Multiplicación. Si se quiere efectuar

$y = p \; q$ podemos poner $\frac{1}{p} = \frac{q}{y}$

esto se puede poner esquemáticamente en la forma:

C	1 o 10	q
D	p	y

Cuando se tiene una serie de multiplicaciones con un mismo factor conviene identificar este factor con p,

pues así se obtienen todos los productos con una sola posición de la reglilla.

DIVISION:

Para la división procedemos de igual forma. Si se tiene:

$$y = \frac{p}{q} \quad \text{podemos poner} \quad \frac{q}{p} = \frac{1}{y}$$

que esquemáticamente quedaría como:

C	q	1 o 10	
D	p	y	

o bien podemos poner:

$$\frac{1}{q} = \frac{y}{p}$$

lo que esquemáticamente quedaría:

C	1 o 10	y	
D	q	p	

Se dará preferencia a esta segunda realización todas las veces que el divisor q sea fijo, para efectuar varias divisiones.

O sea que como regla práctica podemos decir que la multiplicación y división pueden resolverse en la regla de cálculo, como una proporción, usando como raya de fracción la separación entre ambas escalas.

También con estas escalas podemos resolver la regla de tres. Esto se efectúa inmediatamente en la forma:

$$\frac{p}{q} = \frac{x}{y}$$

lo que esquemáticamente quedaría como:

C	p	x
D	q	y

3) Escalas D y CI:

1) $\log d = \log \frac{10}{ci}$ $\qquad d = \frac{10}{ci}$

o bien: $\qquad ci = \frac{10}{d}$

que sirve para encontrar valores recíprocos.

2) $\qquad \log d - \log \frac{10}{ci} = C^{te}.$

de donde: $\quad d \cdot ci = C^{te}. \quad d_1 \cdot ci_1 = d_2 \cdot ci_2$

Las divisiones $y = \frac{p}{x}$ se pueden hacer con estas escalas por medio de una sola posición de la reglilla:

$$1 \cdot p = x \cdot y$$

o esquemáticamente:

CI	1	x
D	p	y

3) Escalas D y A o C y B.

1) $\qquad \log d = \frac{1}{2} \log a$

de donde: $\quad d = \sqrt{a}$ $\quad$ o bien $\quad a = d^2$

Con estas escalas se buscan las raíces o se elevan al cuadrado las cantidades. Al extraer raíz el alumno

deberá distinguir entre $\sqrt{3,5}$ y $\sqrt{0,35}$ por ejemplo.

5) Escalas D y B o C y A.

1) Para la posición principal se tienen las mismas relaciones que para las escalas D y A.

2) $\log d - \frac{1}{2} \log b = C^{te}$ o sea: $\frac{d}{\sqrt{b}} = C^{te}$

luego: $$\frac{d_1}{\sqrt{b_1}} = \frac{d_2}{\sqrt{b_2}} \qquad \frac{d_1^2}{b_1} = \frac{d_2^2}{b_2}$$

Estas escalas nos permiten, dado el diámetro, calcular la superficie del círculo o vice-versa. Si se tiene:

$$S = \frac{\pi}{4} d^2$$

podemos poner:

$$\frac{S}{d^2} = \frac{\pi}{2^2}$$

6) Escalas D y K.

1) $$\log d = \frac{1}{3} \log k$$

o sea: $d = \sqrt[3]{k}$ o bien $k = d^3$

7) Escalas C y K.

1) Es igual que para D y K.

2) $$\log c - \frac{1}{3} \log k = C^{te}$$

o sea: $$\frac{d\,c}{\sqrt[3]{k}} = c^{te}$$

de donde: $$\frac{c_1}{\sqrt[3]{k_1}} = \frac{c_2}{\sqrt[3]{k_2}}$$

8) Escalas A y K o B y K.

1) $$\frac{1}{2}\log a = \frac{1}{3}\log k$$

luego: $$\sqrt{a} = \sqrt[3]{k}$$

o bien: $$a = k^{2/3} \quad \text{o} \quad k = a^{3/2}$$

Las escalas que siguen se usan para trabajar con funciones trigonométricas.

9) Escalas A y S.

o1) $$\frac{1}{2}\log a = \frac{1}{2}\log (100 \operatorname{sen} s)$$

o sea: $$\operatorname{sen} s = \frac{a}{100} \qquad s = \text{arc sen } \frac{a}{100}$$

2) $$\frac{1}{2}\log a - \frac{1}{2}\log (100 \operatorname{sen} s) = c^{te}$$

de donde: $$\frac{a}{\operatorname{sen} s} = c^{te}$$

luego: $$\frac{a_1}{\operatorname{sen} s_1} = \frac{a_2}{\operatorname{sen} s_2}$$

La última relación puede usarse para resolver

triángulos oblicuos. Si se quiere encontrar:

$$y = a \text{ sen } s$$

se tiene $$\frac{a}{\text{sen } 90^\circ} = \frac{y}{\text{sen } s}$$

con lo cual determinamos y. Si queremos encontrar:

$$y = \frac{a}{\text{sen } s}$$

se tiene: $$\frac{a}{\text{sen } s} = \frac{y}{\text{sen } 90^\circ}$$

para calcular la función coseno sabemos que:

$$\cos s = \text{sen } (90^\circ - s)$$

10) Escalas D y T.

1) $\log d = \log (10 \text{ tg } t)$ $\qquad \text{tg } t = \frac{d}{10}$

$$t = \text{arc tg } \frac{d}{10}$$

2) $\log d - \log (10 \text{ tg } t) = C^{te}$

o sea: $$\frac{d}{\text{tg } t} = C^{te}$$

o bien: $$\frac{d_1}{\text{tg } t_1} = \frac{d_2}{\text{tg } t_2}$$

Si queremos calcular:

$$y = d \text{ tg } t$$

hacemos $$\frac{d}{tg\ 45^\circ} = \frac{y}{tg\ t}$$

y si queremos $$y = \frac{d}{tg\ t}$$

hacemos: $$\frac{d}{tg\ t} = \frac{y}{tg\ 45^\circ}$$

para calcular la cotangente sabemos que:

$$\cot t = tg\ (90^\circ - t)$$

RESOLUCION DE ECUACIONES ALGEBRAICAS CON REGLA DE CALCULO:

Método de aproximaciones sucesivas:

1) Resolución de la ecuación de segundo grado.

Sea la ecuación: $$a\ x^2 + b\ x + c = 0 \qquad (1)$$

La reduciremos a la forma:

$$x^2 + p\ x + q = 0$$

dividiendo por el divisor fijo a. O sea esquemáticamente en la regla de cálculo:

C	a	b	c
D	1	p	q

Ahora podremos escribir:

$$x + \frac{q}{x} = - p$$

Luego tanteando valores de x, se calculará cada vez $\frac{q}{x}$ hasta llegar a la suma - p. Para obtener $\frac{q}{x}$ en la regla de cálculo nos valemos de las escalas:

CI	q	$\frac{q}{x}$
D	1	x

Veamos un ejemplo. Sea la ecuación:

$$2,41\,x^2 - 5,93 - 1,61 = 0$$

Dividamos por 2,41.

Queda: $$x^2 - 2,46x - 0,668 = 0$$

Para resolverla formamos un cuadro con los valores de x y $\frac{0,668}{x}$ cuya diferencia debe ser 2,46. Tomamos un valor cualquiera que aproximadamente sea solución de la ecuación, por ejemplo:

x	3.00	2.80	3.70	2.71
$\frac{0,668}{x}$	0.22	0.24	0.25	0.25
Dif.	2.78	2.56	2.45	2.46

Empezamos por:

$$x = 3$$

resulta: $$\frac{0,668}{x} = 0.22$$

si hacemos la diferencia se vé que ésta sale 2.78. Como la diferencia debe ser menor tomamos un valor menor de x, que a la vez hace mayor el factor $\frac{0,668}{x}$. Se sigue así hasta que

la diferencia entre ambas cantidades sea 2.46.

Para encontrar la otra solución sabemos que las raíces de la ecuación de segundo grado cumplen la relación:

$$x_1 \; x_2 = q \qquad x_2 = \frac{q}{x_1}$$

Luego la solución de nuestro problema sería:

$$x_1 = 2.71 \qquad x_2 = -0.25$$

2) Resolución de la ecuación de tercer grado.

Sea la ecuación de tercer grado completa general.

$$z^3 + a\ z^2 + b\ z + c = 0 \qquad (2)$$

Queremos reducir (2) a la forma:

$$y^3 + p\ y + q = 0 \qquad (3)$$

Para esto hacemos $z = y - k$

siendo k una cantidad por determinar. Reemplazando z por su valor en (2) queda:

$$y^3 + (a - 3k)\ y^2 + (3k^2 - 2ak + b)\ y + \\ + (ak^2 - bk - k^3 + c) = 0$$

Luego hacemos: $a - 3k = 0$

de donde: $k = \frac{a}{3}$

Luego si hacemos $z = y - \frac{a}{3}$

la ecuación (2) nos queda en la forma (3):

$$y^3 + p\,y + q = 0$$

Sabemos que las tres raíces de la ecuación cumplen la relación:

$$y_1 + y_2 + y_3 = 0$$

Démosle a la ecuación (3) la forma:

$$y^2 + \frac{q}{y} = - p$$

Lo que podemos lograr con la regla de cálculo, procediendo según se indica en el esquema:

A	1	y^2
CI	q	$\frac{q}{y}$
D	1	y

Veamos un ejemplo:

Supóngase que queremos resolver la ecuación:

$$x^3 - 6{,}8\,x - 3{,}0 = 0$$

dividiendo por x tenemos:

$$x^2 - \frac{3{,}0}{x} = 6{,}8$$

Buscaremos primero una raíz positiva.

x	3	2.7	2.8
x^2	9	7.3	7.84
$\frac{3,0}{x}$	1	1.1	1.07
	8	6.2	6.77

Luego: $x_1 = 2.8$

Ahora podríamos dividir la ecuación por (x - 2,8) para reducirla a una de segundo grado, pero mejor busquemos directamente una raíz negativa.

x	-2,5	-2,3	- 2,40	- 2,35
x^2	6,25	5,3	5,8	5,50
$\frac{3}{x}$	1, 20	1,3	1,2	1,28
	7,45	6,6	7,0	6,78

Luego: $x_2 = - 2.35$

Para determinar x3 sabemos que:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

$$2.82 - 2.35 + x_3 = 0$$

$$x_3 = - 0.45$$

Luego las tres raíces de la ecuación son:

$$x_1 = 2.8 \qquad x_2 = - 2.35 \qquad x_3 = - 0.45$$

3) Resolución de sistemas de ecuaciones de primer grado:
El método de resolución lo ilustraremos con un ejemplo:

Sea el sistema:

3,61 x	- 4,30 y	+ 5,70 z = 0,845	: 3,61	(1)	
2,42 x	+ 2,93 y	- 8,35 z = 1,12	: 2,42	(2)	I
7,90 x	- 1,05 y	+ 3,40 z 2,49	: 7,90	(3)	
1	- 1,19	1,58 | 0,234		(1')	
1	1,21	- 3,45 | 0,468		(2')	II
1	- 0,13	+ 0,43 | 0,314		U3')	
	2,40	- 5,03 | 0,234	: 2,40		III
	1,34	3,88 | 0,154	: 1,34		
	1	- 2,09 | 0,0971		(4)	IV
	1	- 2,90 | 0,115		(5)	
		0,81 | =0,018	: 0,81	(6)	
		1 | - 0,022		(7)	

z = - 0.022 y = + 0,051 x = 0,330

El procedimiento es el siguiente: Dividimos cada ecuación por el coeficiente de x. Colocando sólo los coeficientes de las variables, las ecuaciones I se transforman en las ecuaciones II. Luego restamos (1') de (2') y (3') de (2'). Nos quedan las ecuaciones III.

En seguida dividimos cada ecuación por el coeficiente de la variable y. Las ecuaciones III se transforman en las ecuaciones IV. Restamos (5) de (4) y obtenemos la ecuación (6). Dividimos nuevamente (6) por el coeficiente de la

variable z y obtenemos (7) que es:

$$z = 0,022$$

Si reemplazamos el valor de z en (4) obtenemos:

$$y = 0,051$$

y si luego reemplazamos z e y en (3') obtenemos:

$$x = 0,330$$

con lo cual queda resuelto el sistema.

4) Cálculo de polinomios y resolución de la ecuación de grado n.

Sea un polinomio de grado n

$$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots\ldots + a_1 x + a_o$$

Trataremos aquí un procedimiento abreviado para calcular el valor de y para valores de x. Luego, procediendo por tanteo podremos ir buscando un valor de x que haga

$$y = 0$$

o sea resolver la ecuación:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots\ldots + a_1 x + a_o = 0$$

Expondremos el método por medio de un ejemplo:

Sea $$y = 1.34 x^3 - 2.50 x^2 + 1.07 x - 4.62 \qquad (1)$$

(1) lo transformaremos del siguiente modo:

$$y = \left[(1.34 x - 2.50) x + 1.07 \right] x - 4.62 \qquad (2)$$

Calcularemos cuanto vale y para x=2. Para eso hacemos el siguiente cuadro:

	1.34	- 2.50	1.07	-4.62	
x=2,00	0	2.68	0.36	2.86	
	1,34	0,18	1,43	- 1,76	= y

En la primera línea colocamos los coeficientes de las potencias decrecientes de x en la ecuación (1). Debajo del primer coeficiente colocamos 0 y sumamos algebraicamente las dos cantidades. Queda 1.34. Luego multiplicamos 1.34 por 2.00 y lo colocamos debajo del segunco coeficiente (2.50) y sumamos. El resultado 0.18, lo multiplicamos por 2,00 y lo colocamos debajo del tercer coeficiente. Sumamos las dos cantidades y el resultado (1.43) lo volvemos a multiplicar por 2,00 y lo colocamos debajo del cuarto coeficiente. Restamos ambas cantidades y obtenemos:

$$y = - 1.76$$

Todas las multiplicaciones se podrán hacer con una sola posición de la regla de cálculo .

Como se vé el método consiste en llevar ordenadamente en un cuadro el resultado de las multiplicaciones parciales y sumas de la ecuación (2). Probemos ahora con otros valores de x para tratar de encontrar uno que haga y=0.

(Ver tabla en la pág. siguiente)

x	y
2,00	- 1,76
1,80	- 2,98
2,30	0,90
2,28	- 0,09
2,21	0,00

x = 1,80	1.34	- 2.50	1,07	- 4,62
	0	2,41	-0,16	1,64
	1,34	- 0,09	-0,91	2,98
x = 2,30	1,34	- 2,50	1,07	- 4,62
	0	3,08	1,33	5,52
	1,34	0,59	2,43	0,90
x = 2,20	1,34	- 2,50	1,07	-4,62
	0	2,95	0,99	4,53
	1,34	0,45	2,06	0,09
x = 2,21	1,34	-2,50	1,07	-4,62
	0	2,96	1,02	4,62
	1,34	0,46	2,09	0,00

Al ir tanteando con x vemos que al disminuir x, y aumenta en valor absoluto. Por lo tanto, aumentamos x a 2.3, pero entonces y pasa a ser positivo. Luego se van haciendo aproximaciones sucesivas hasta encontrar el valor de x que haga y = 0.

Entonces una solución de la ecuación es:

$$x = 2.21$$

y ésta queda reducida a:

$$y = (1.34\ x^2 + 0.46\ x + 2.11)(x - 2.21) = 0$$

puesto que la división por (x - 2,21) arroja justamente los coeficientes que aparecen en la última línea, y para obtener las otras soluciones resolvemos la ecuación:

$$1.34\ x^2 + 0,46\ x + 2.11 = 0$$

ecuación que podemos seguir tratando por el mismo método o por el método particular de la ecuación de segundo grado.

Como se vé en estos métodos de resolución de ecuaciones algebraicas, el uso de la regla de cálculo tiene como fin obtener resultados rápidos y aproximados por medio de multiplicaciones y divisiones, al ir resolviendo las ecuaciones por tanteo. Cabe hacer notar que éstos métodos son muy útiles puesto que, en general, los coeficientes de las variables no son números enteros.

--- 0 ---

E S T A D I S T I C A M A T E M A T I C A

La estadística matemática tiene por objeto reunir un material numérico amplio en un resultado reducido, consistiendo de una o varias indicaciones de las cuales pueden sacarse consecuencias de apreciación y comparación.

El primer elemento de esta ciencia es el promedio, pero este sólo resultado no basta para la correcta interpretación de los datos. Veremos en este capítulo los diversos elementos de que se vale, para reunir en unos pocos valores, un gran número de datos y a la vez hacer que esos pocos valores permitan obtener un vistazo completo de la gran cantidad de datos.

Pasaremos ahora a estudiar los métodos y elementos de que se vale la estadística matemática para el estudio de los fenómenos a que ésta se puede aplicar.

PROMEDIO;

Los datos son números o los podemos reducir a ellos.

Designaremos los datos con las letras

$$x_1 \; ; \; x_2 \; ; \; x_3 \; ; \; \ldots\ldots \; ; \; x_N$$

y los llamaremos valores estadísticos o variable estadística.

Llamamos un colectivo a una colección de datos estadísticos. N es la amplitud del colectivo o número de observaciones hechas. Los x pueden ser números positivos o negativos, enteros o fraccionarios.

Definiremos $\bar{x}$ como el promedio aritmético de los valores estadísticos, o sea:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots\ldots + x_N}{N} \qquad (1)$$

Así, por ejemplo: Tenemos 8 notas

$$5 \; ; \; 3 \; ; \; 4 \; ; \; 7 \; ; \; 4 \; ; \; 5 \; ; \; 6 \; ; \; 6$$

si hacemos el promedio se tiene:

$$5+3+4+7+4+5+6+6 = 40 \; ; \; 8 = 5$$

luego:

$$x = 5$$

En la práctica cuando hay gran cantidad de valores estadísticos hay peligro de equivocarse en el uso de esta fórmula. Así pues buscaremos otra fórmula más segura y cómoda para obtener el promedio.

Para esto a la fórmula (1) sumésmosle y restémosle x_o a cada término. Así tenemos:

$$\bar{x} = \frac{x_o + (x_1 - x_o) + x_o + (x_2 - x_o) + \ldots\ldots + x_o + (x_N - x_o)}{N}$$

de aquí:

$$\bar{x} = x_o + \frac{(x_1 - x_o) + \ldots\ldots + (x_N - x_o)}{N} \qquad (2)$$

O sea, el método consiste en buscar por tanteo un valor x_o que constituya el promedio provisorio y luego buscar las diferencias de cada dato con este valor (x_o) y promediarlos. Luego:

x_o = promedio provisorio

Ilustraremos este método con un ejemplo. Sean las notas del caso anterior. Apliquemos la fórmula (2);

	+ Difs.	-
5		
3	1	1
4	0	
7	3	
4	0	
5	1	
6	2	
6	2	
	9	1

$x_o = 4$

$9 - 1 = 8 \; ; \; 8 = 1$

$\bar{x} = 4 + 1 = 5$

Tomemos como promedio provisorio 4. Hacemos la diferencia de cada valor y colocamos las diferencias positivas en una columna y las negativas en la otra. La suma de las positivas vale 9 y las negativas 1. Luego para obtener el promedio tenemos que sumarle 1 a 4.

Veamos otro ejemplo: Sea la tabla que sigue. Elijamos como promedio provisorio 160. Procediendo de igual forma que en el caso anterior se obtiene:

	+	-
162		
163	2	2
167	5	
163	7	
163	3	
167	3	
158	7	
160	23	

$N = 8 \qquad x_o = 160$

$23 \; ; \; 8 = 2,9$

$\bar{x} = 160 + 2,9 = 162,9$

Cuando la diferencia es cero se coloca en el cuadro.

FRECUENCIA:

Introduciremos un nuevo elemento en el estudio de la estadística.

Frecuencia es el número de veces que se repite un mismo dato estadístico. Un dato estadístico puede presentarse un gran número de veces. En vez de anotarlo todas las veces, lo colocamos una vez y consideramos el número de veces que se repite. La frecuencia la designaremos con la letra f.

Sabemos que:

$$\Sigma f = N$$

De ahora en adelante usaremos el siguiente simbolismo clásico;

$$\left[\ \right] = \Sigma = \text{suma}$$

Si $\quad \Phi(x) = \Phi(x_1) + \Phi(x_2) + \ldots\ldots\ldots \Phi(x_n)$

$$\left[f \cdot \Phi(x)\right] = f_1 \cdot \Phi(x_1) + f_2 \cdot \Phi(x_2) + \ldots\ldots\ldots + f_n \cdot \Phi(x_n)$$

Tenemos:

$$\left[f\right] = \Sigma f = N$$

$$\left[f\,x\right] = f_1\ x_1 + f_2\ x_2 + \ldots\ldots\ldots + f_n\ x_n$$

Luego:

$$\boxed{\bar{x} = \frac{\left[f\,x\right]}{N}} \qquad (3)$$

Algunas propiedades del símbolo $\left[\ \right]$ son:

$$\left[f(x + y)\right] = \left[f\,x\right] + \left[f\,y\right]$$

$$\left[f(x + a)^2\right] = \left[f\,x^2\right] + \left[2\,f\,x\,a\right] + \left[f\,a^2\right]$$

$$= \left[f\,x^2\right] + 2\,a\left[f\,x\right] + a^2\,N$$

Veamos un caso en que se emplea la frecuencia;

Sea una votación. Los votos con "si" los representaremos por (1), los "no" por (-1) y los en blanco con (0). Supóngase el resultado de la votación representado por el siguiente cuadro;

x	f	
-1	☑☑☑☑☐	23
0	☐	4
1	☑☑☑☑☑☑	30

Luego: $N = 57$

Si sumamos los votos con su signo se tien:

$$30 \cdot 1 + 4 \cdot 0 + 23\,(-1) = 7$$

O sea: $$x = \frac{7}{57}$$

FORMACION DE GRUPOS;

Cuando en la recolección de material estadístico se observa que éstos varían en una amplitud muy grande o tienen variaciones pequeñas muy numerosas, se usa el procedimiento de formar grupos con los datos estadísticos y anotar

la frecuencia con que se presentan los valores comprendidos en cada grupo.

Veremos por ejemplo el resultado de una estadística de la estatura de un grupo de alumnos. La estatura variará por lo general entre 1,60 y 1,90 mts. Formaremos 10 grupos, tal como aparece en el cuadro que sigue:

X	x	f
- 4	160-162	1
- 3	163-165	5
- 2	166-168	4
- 1	169-171	6
0	172-174	8
1	175-177	4
2	178-180	6
3	181-183	2
4	184-186	1
5	187-989	1

Así, por ejemplo, si un alumno tiene 1,72 m. de estatura se anotará en el grupo quinto. En esta forma se reune el material y se observa la frecuencia con que se repite cada grupo. Llamemos h el ancho del grupo (amplitud de la faja). h es la distancia de las variables estadísticas iniciales de un grupo, al siguiente.

En el ejemplo $h = 3$

Cada grupo se identifica con su centro o sea en este caso para el cuarto grupo se considera 1,70 m. En seguida elegiremos de entre estos centros el promedio provisorio x_o, tratando de que sea más o menos el promedio de la estatura. Lo diferenciamos del resto de los grupos por dos rayas paralelas.

A este grupo le damos rango 0. Hacia adelante le damos a los grupos rango positivo 1, 2, 3... y hacia atrás le damos rango negativo -1, -2, -3... Este rango lo designamos con la letra X y lo podemos llamar o considerar como distancia de cada grupo al centro (grupo correspondiente al promedio provisorio).

Tenemos entonces:

$$\boxed{x = x_o + h \quad X} \qquad (4)$$

$$\left[f\,\bar{x}\right] = \left[f(x_o + h\,X)\right] = \left[f\,x_o\right] + \left[f\,h\,X\right]$$

$$= N\,x + h\left[f\,X\right] = N\,x_o + \ldots$$

Pero por definición:

$$\bar{x} = \frac{\left[f\,x\right]}{N} = \frac{N\,x_o + h\left[(f\,X)\right]}{N}$$

$$\boxed{\bar{x} = x_o + h\,\frac{\left[f\,X\right]}{N}} \qquad (5)$$

Para calcular $\left[f\ X\right]$ calculamos separadamente el valor de f X para cada grupo, que se obtiene multiplicando el número de orden del grupo por la frecuencia. Separando los valores positivos y negativos se tiene el ejemplo anterior:

$\left[f\right.$ +	$X\left.\right]$ −
4	6
12	8
6	15
4	4
5	
31	33

Tenemos: $31 - 33 = -2$

Luego: $\bar{x} = 173 - 3 \cdot \frac{2}{38}$

$$\bar{x} = 172{,}84$$

DISPERSION:

Trataremos otra de las nociones fundamentales de la estadística. Para esto veamos primero un ejemplo. Supóngase que se ha reunido un colectivo en que la variable estadística son temperaturas y supongamos que éstas varían entre - 5° y 38°. El primer grupo estará destinado a las temperaturas entre -6° y 4°. Los demás datos se disponen como aparece en el cuadro adjunto.

X	x		f
-7	-6	-4	1
-6	-3	-1	3
-5	0-	2	2
-4	3-	5	5
-3	6-	8	12
-2	9-	11	
-1	12-	14	38
0	15-	17	41
1	18-	20	37
2	21-	23	29
3	24-	26	11
4	27-	29	6
5	30-	32	3
6	33-	35	3
7	36-	38	1
			213

Elegiremos como x_o el valor 16 del octavo grupo.

Se tiene:

$$N = 213 \qquad h = 3$$

Según (5)

$$\bar{x} = x_o + h \frac{[f\ X]}{N}$$

Definiremos $\bar{X}$ como:

$$\bar{X} = \frac{[f\ X]}{N}$$

y podemos llamarlo promedio de las X por analogía con la fórmula (3).

Luego podemos poner:

$$\bar{x} = x_0 + h\,\bar{X} \qquad (6)$$

Calculemos $\left[f \quad X\right]$

$$192 - 171 = 21$$

$$\bar{X} = \frac{21}{213} = 0.10$$

De donde:

$$\bar{x} = 16 + 3 \,.\, 0.10 = 16.30$$

$\left[f \quad X\right]$	
+	-
37	7
58	18
33	10
24	20
15	36
18	42
7	8
192	171

Pero este resultado no nos dice si la variación de temperatura es muy grande o pequeña. Para ver esto podríamos anotar las temperaturas máxima y mínima, pero siendo estas un tanto casuales veremos un método matemático para dar una noción de la variación de la variable esta dística.

Veamos un ejemplo para los cuales en tres casos el promedio es el mismo y la variación muy diferente.

x	$x-\bar{x}$	$(x-\bar{x})^2$	x	$x-\bar{x}$	$(x-\bar{x})^2$	x	$x-\bar{x}$	$(x-\bar{x})^2$
15	-1.2	1.44	12	-4.2	17.64	6	-10.2	104.04
16	-0.2	0.04	14	-2.2	4.84	11	- 5.2	27.04
16	-0.2	0.04	16	0.2	0.04	17	0.8	0.64
17	0.8	0.64	19	2.8	7.84	23	6.8	46.24
17	0.8	0.64	20	3.8	14.44	24	7.8	60.84
16.2	3.2	2.80	16.2	13.2	44.80	16.2	30.8	238.80
	0.6	0.56		2.6	8.96		6.2	47.76
		0.75			3			6.9
	I			II			III	

En el segundo caso hay mayor variación que en el primero y en el tercero mayor que en el segundo.

Formemos las diferencias con los promedios (primera columna de la derecha) y sumemos sus valores absolutos. En seguida dividamos este resultado por N (5). Se tiene 0.6; 2.6; 6.2 Este sería un método para calcular la variación pero como no da mucha precisión ni comodidad matemática se prefiere elevar al cuadrado las diferencias para sensibilizarlas y luego sumarlas (segunda columna de la derecha). Luego dividiendo por 5 se tiene : 0,56; 8,96; 47,76. En seguida extrayendo raíz cuadrada del resultado nos queda: 0.75; 3; 6,9 Este es el método que adoptaremos para apreciar la variación de la variable estadística. Expresando este procedimiento por una fórmula se tendría;

$$\sigma = \sqrt{\frac{f(x - \bar{x})^2}{N}} \qquad (7)$$

lo llamaremos "dispersión del colectivo (en inglés "standard desviation) o desviación del colectivo. Esta fórmula la podemos transformar.

$$\sigma^2 N = \left[f(x - \bar{x})^2\right] = \left[f x^2\right] - 2\bar{x}\left[f x\right] + N \bar{x}^2$$

pero $\left[f x\right] = N \bar{x}$

luego: $$\sigma^2 N = \left[f x^2\right] - N \bar{x}^2 \qquad (8)$$

Este resultado es satisfactorio y se puede usar en el cálculo por máquina calculadora. Pero busquemos una expresión de la fórmula (7) qque sea más práctica.

$$N \sigma^2 = \left[f(x - \bar{x})^2\right] = \left[f(x_o + h X - x_o - h \bar{X})^2\right]$$
$$= h^2 \left[f(X - \bar{X})^2\right]$$
$$= h^2 \left\{\left[f X^2\right] - 2 X \left[f X\right] + N X^2\right\}$$

pero $\left[f \quad \bar{X}\right] = N\,\bar{X}$

hagamos; $\dfrac{\left[f \quad x^2\right]}{N} = \bar{X}^2$

Luego σ valdría; $\boxed{\sigma = h\sqrt{\bar{X}^2 - \bar{X}^2}}$ (9)

Apliquemos esta fórmula al caso de las temperaturas;

Elevamos X al cuadrado, lo multiplicamos por la frecuencia y luego sumamos sus valores.

f	X^2
49	
108	
50	
80	
108	
84	
38	
37	
116	
99	
96	
75	
108	
49	
1097	

$1097 : 213 = 5.15$

$\bar{X}^2 = 5.15$

$\bar{X}^2 = 0.01$

$\sigma = 3\sqrt{5.14} = 6.8$

Luego nuestro colectivo está caracterizado por:

$N = 213 \qquad \bar{x} = 16.3 \qquad \sigma = 6.8$

El colectivo tiene una variación media de 14° (2σ).

Formemos las siguientes diferencias, partiendo de $\bar{x}$ hacia arriba y hacia abajo.

$\bar{x} - 3\sigma = -4.1$ $\qquad$ $\bar{x} + \sigma = 23.1$

$\bar{x} - 2\sigma = 2.7$ $\qquad$ $\bar{x} + 2\sigma = 29.9$

$\bar{x} - 1\sigma = 9.5$ $\qquad$ $\bar{x} + 3\sigma = 36.7$

$\bar{x} = 16.3$

Sólo quedan fuera - 5° y 38°. O sea que entre $\bar{x} - 3\sigma$ y $\bar{x}+3\sigma$ está comprendido casi todo el material. Esto se puede expresar poniendo:

$$\bar{x} - 3\sigma < x < \bar{x} + 3\sigma$$

Luego para apreciar las temperaturas máximas o mínimas se le suma o resta 3σ al promedio.

La dispersión y el medio aritmético son datos suficientes para formarse una idea estadística de un colectivo.

Veamos un ejemplo de interpretación de estos datos.

Se tiene:

Término medio de lluvia caída: 36 cm
Dispersión..... 8 "

Tenemos entonces:

$$12 \text{ cm} < x < 60 \text{ cm}$$

12 y 60 son los valores entre los cuales varía x que es la lluvia caída.

Resumiendo lo anteriormente tratado podemos decir que la estadística consiste en resumir una gran cantidad de datos en unos pocos, y de esos pocos obtener un vistazo de la gran cantidad de datos.

GRAFICOS ESTADISTICOS:

Es un trabajo estadístico hay dos partes: 1°: el cálculo estadístico y 2°: el gráfico.

La primera parte la hemos estudiado en los párrafos anteriores. Pasaremos a ver la segunda parte.

Consiste en representar gráficamente la relación entre x y f. Se toma como abscisa la variable estadística x, como ordenada la frecuencia f. Para confeccionar este gráfico se eligen las escalas de manera conveniente, según sean las exigencias del caso. Los valores de f puede que no sean exactos (fidedignos) y entonces para corregir este defecto se le aplica a los f uno o dos alisamientos empleando la fórmula del promedio móvil.

Según la fórmula se tiene:

$$f^* = \frac{f_{n-1} + 2\ f_n + f_{n+1}}{4}$$

$$f^* = f_n + \frac{(f_{n-1} - f_n) + (f_{n+1} - f_n)}{4}$$

$$f^* = f_n + \frac{-\bar{\Delta} f_n + \Delta f_n}{4}$$

$$f^* = f_n + \frac{\Delta f_n - \bar{\Delta} f_n}{4}$$

Veamos un ejemplo. Sea la tabla de valores de las temperaturas de la pág. 48.

(Ver tabla en la pág. siguiente)

Empleando las fórmulas del alisamiento obtenemos los valores de la columna de las f^*. Luego confeccionamos el gráfico que se vé en la pág. 44 En este gráfico se marca con color los valores correspondientes al promedio $\bar{x}$ y a los valores $\bar{x}+\sigma$; $\bar{x}+2\sigma$; $\bar{x}+3\sigma$; y los $\bar{x}-\sigma$; $\bar{x}-2\sigma$; $\bar{x}-3\sigma$.

x	f	f*
-6 - 4	1	1.2
-3 - 1	3	2.2
0 2	2	3.0
3 5	5	6.0
6 8	12	12.5
9- 11	21	23.0
12- 14	38	34.5
15- 17	41	49.2
18-20	37	36.0
21-23	29	26.5
24-26	11	14.2
27-29	6	6.5
30-32	3	3.8
33-35	3	2.5
36-38	1	1.2

A menudo se suele comparar este gráfico con la curva de las probabilidades. La ecuación de la curva teórica de las probabilidades es:

$$V = \frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}} \; e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}$$

Para hacer esta comparación se dibuja esta curva en papel transparente y a la misma escala del gráfico. De este modo se pueden comparar ambas curvas.

Con esto damos por terminado el estudio estadístico para el caso de una variable. Pasaremos a ver el caso de dos variables.

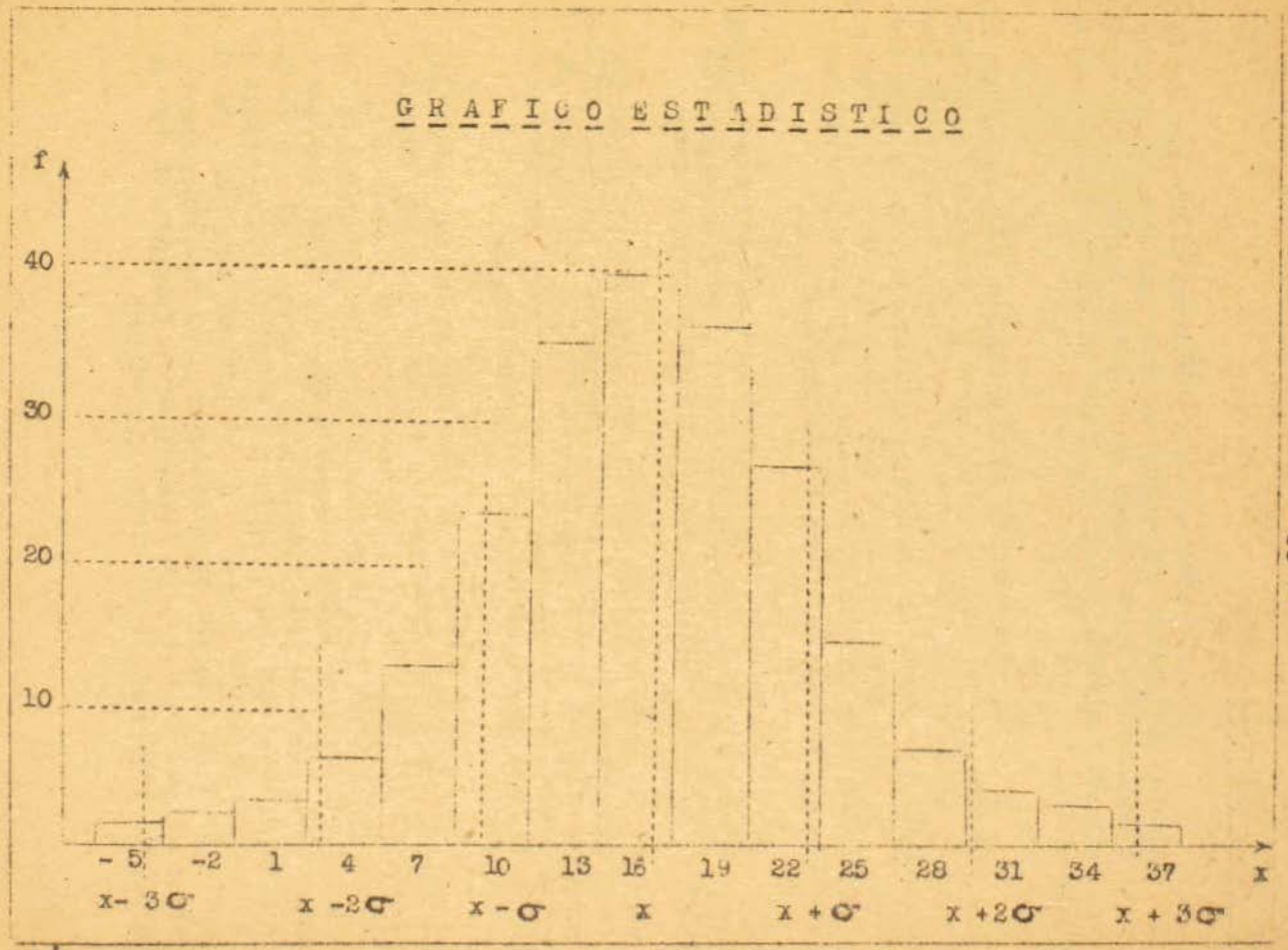


GRAFICO ESTADISTICO
f
40
30
20
10
- 5
-2
1
4
7
10
13
16
19
22
25
28
31
34
37
x
x- 3σ
x -2σ
x -σ
x
x +σ
x +2σ
x + 3σ

CASO DE DOS VARIABLES:

En este caso en cada observación hay que anotar dos datos estadísticos o sea debemos trabajar con dos variables estadísticas. Para tratar estos casos se hace primeramente el estudio estadístico de cada una de las variables separadamente.

Una vez reunido el material se dispone en un cuadro llevando en renglones horizontales los valores de una variable y en columnas verticales los valores de la otra. De este modo una observación queda perfectamente determinada sabiendo el valor de ambos datos estadísticos. Para la formación de grupos y distribución de los valores se procede en idéntica forma que para el caso de una variable.

Para aclarar este procedimiento haremos un ejemplo. Haremos el estudio estadístico del peso y estatura de algunos alumnos. Supóngase que el material reunido sea:

x	175	172	173	171	169	171	178	172	168	171	167	169	180
y	73	65	69	54	53	54	70	78	65	53	85	61	76

siendo x la estatura en cm. e y el peso en kgs.

Este material lo dispondremos en un cuadro. Llevaremos en líneas horizontales la variable y, y en columnas verticales la variable x. El ancho de grupos x será de h = 2 y el de los y de h = 5. Para anotar el valor estadístico en el cuadro se procede del siguiente modo: Supóngase que queremos colocar el 5° dato estadístico o sea x = 171 e y = 54. Vemos la columna que corresponde a x = 171 (tercera columna) y el renglón que corresponde a y = 54 (primer renglón). En el cuadro que está a la vez en la columna y el renglón colocamos una rayita vertical. De igual modo se procede con los demás datos, obteniéndose el cuadro que sigue:

y x	167-8	169-70	171-2	17394	175-6	177-8	179-80	f_y	Y
52-56								4	-3
57-61								1	-2
62-66								2	-1
67-71								3	-0
72-76								2	1
77-81								1	2
82-86								1	3
f_x	2	3	4	1	1	2	1	14	
X	-2	-1	0	1	2	3	4		

Elegiremos como grupo central para los x y el grupo de 171-2 y para los y el de 67-71. Para obtener f_x se suman las rayas de cada columna y para los f_y se suman las rayas de cada renglón.

Como se vé en el cuadro el material está agrupado según la diagonal del rectángulo. Según sea el tipo de agrupación se puede estudiar la dependencia de ambas variables.

Si se tiene en el cuadro una agrupación de la forma:

1) dependencia positiva

2) dependencia negativa

3) dependencia más o menos positiva

4) independencia (los valores máximos y mínimos no coinciden).

Trataremos independientemente x e y.

VARIABLE X;

Elegiremos como x_o el valor 171.5 o sea;

$x_o = 171.5$ $N = 14$ $h = 2$

$[f\ X]$

+	-
1	4
2	3
6	
4	
13	7 = 6

$\bar{x} = x_o + h\ \bar{X}$

$\bar{X} = 0.43$

Luego: $\bar{x} = 171.5 + 0.86 = 172.36$

Veamos cual es la dispersión. Según fórmula (9)

$$\sigma_x^2 = h^2 \left[\frac{\left[f_x \quad X^2 \right]}{N} - X^2 \right]$$

Definiremos:

$$\sigma_X^2 \left[\frac{\left[f_x \; X^2 \right]}{N} - \bar{X}^2 \right] \qquad (11)$$

De donde:

$$\sigma_x^2 = h^2 \, \sigma_X^2$$

o sea:

$$\sigma_x = h \, \sigma_X \qquad (12)$$

Calculemos:

$\left[f_x \quad X^2 \right]$
8
3
1
4
18
16
50 : 14 = 3.57

Tenemos:

$$\bar{X}^2 = 0.43^2 = 0.19$$

$$\sigma_X^2 = 3.57 - 0.19 = 3.38$$

$$\sigma_x = \sqrt{4 \cdot 3.38} = \sqrt{13.52} = 3.7$$

Luego resumiendo tenemos:

$$\bar{X} = 0.43 \qquad \sigma_X = 1.8$$

$$\bar{x} = 172.36 \qquad \sigma_x = 3.7$$

Variable y: De igual forma procederemos para y.

$[f\ Y]$

+	-
2	12
2	2
3	2

$7 \quad 16 = -9 \; ; \; 14 = -0.64$

$y_o = 69 \quad N = 14 \quad h = 5$

$$Y = -0.64$$

$$y = 69 - 3.2 = 65.8$$

Veamos σ_y

$[f_y \; Y^2]$

36
4
2
2
4
9
57 ; 14 = 4.07

$$Y^2 = -0.64^2 = 0.41$$

$$\sigma^2_Y = 4.07 - 0.41 = 3.66$$

$$\sigma_y \quad 5 \cdot \sqrt{3.66} = 5 \cdot 1.9 = 9.5$$

Luego resumiendo tenemos:

$\sigma_Y = -0.64 \qquad Y = 1.9$

$\sigma_y = 65.8 \qquad y = 9.5$

Luego de efectuado éste pasamos a estudiar ambas variables en conjunto.

CORRELACION:

La correlación tiene estrecha relación con la dependencia de las dos variables. Supóngase que se tiene:

	r
$y = 3x - 4$	1
$y = 3 + 0x$	0
$y = 5 - 2x$	-1

En el primer caso a mayor x corresponde mayor y, luego es dependencia positiva. En el segundo caso no hay dependencia entre ambas variables y en el tercer caso a mayor x corresponde menor y o sea hay dependencia negativa.

Llamaremos r el coeficiente de correlación. En el primer caso vale 1, en el segundo cero y en el tercer caso - 1. Deduciremos la fórmula que nos dá la correlación.

Supóngase que se observa dos series de valores x e y

$$\bar{x} = x_o + h\bar{X} \qquad \bar{y} = y_o + h\bar{Y}$$

$$\bar{x} = x + h\bar{X} \qquad \bar{y} = y + h\bar{Y}$$

Definimos σ_X como:

$$\sigma_X^2 = \left[\frac{[f_X X^2]}{N} - \bar{X}^2\right]$$

Pero en la pág. 50 vimos que:

$$\left[\frac{[fx\,X^2]}{N} - \bar{X}^2\right] = \frac{[f(X - \bar{X})^2]}{N} \qquad \overline{(X - \bar{X})^2}$$

Luego: $$\sigma_X^2 = \overline{(X - \bar{X})^2} \qquad (13)$$

y por analogía $$\sigma_Y^2 = \overline{(Y - \bar{Y})^2} \qquad (14)$$

sea ahora $$\mu = \overline{(X - \bar{X})(Y - \bar{Y})}$$

podemos formar la siguiente expresión:

$$\sigma_X^2 + \sigma_Y^2 \; z^2 \pm 2\mu z \qquad (15)$$

Ahora bien demostraremos la siguiente igualdad.

$$\overline{x + y} = \bar{x} + \bar{y}$$

O sea que el promedio de una suma es igual al promedio de los sumandos. Para demostrar esto sabemos que:

$$\overline{x + y} = \frac{\overline{[f(x + y)]}}{N} = \frac{\overline{[f\,x]}}{N} + \frac{\overline{[f\,y]}}{N} = \bar{x} + \bar{y}$$

Debido a esta propiedad podemos establecer la igualdad:

$$\sigma_X^2 + \sigma_Y^2 \cdot z^2 \pm 2\mu z = \overline{\left\{(X - \bar{X})^2 + z(Y - \bar{Y})\right\}^2} \geq 0 \qquad (16)$$

La discriminante vale:

$$\Delta = (2\mu)^2 - 4\sigma_X^2 \cdot \sigma_Y^2$$

y para que se cumpla la relación (16) se debe tener:

$$\Delta \leq 0$$

o sea $$(2\mu)^2 - 4\sigma_X^2 \cdot \sigma_Y^2 \leq 0$$

de donde: $$|\mu| \leq \sigma_X \cdot \sigma_Y$$

entonces llamaremos coeficientes de correlación al valor:

$$r = \frac{\mu}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} \qquad (17)$$

r varía de -1 a +1. Ahora bien si $z = \pm 1$ hay dependencia lineal, pues:

$$z(Y - \bar{Y}) + (X - \bar{X}) = 0$$

y queda: $$Y = mX + n$$

Desarrollemos la fórmula (17)

$$r = \frac{\overline{(X - \bar{X})(Y - \bar{Y})}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} \qquad (-1 \leq r \leq 1)$$

$$r = \frac{\overline{(XY - \bar{X}Y - X\bar{Y} + \bar{X}\bar{Y})}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}$$

$$r = \frac{\overline{XY} - \overline{\bar{X}Y} - \overline{X\bar{Y}} \quad \overline{\bar{X}\bar{Y}}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}$$

Luego:

$$r = \frac{\frac{[f_{xy}\ X\ Y]}{N} - \bar{X}\,\bar{Y}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} \qquad (18)$$

ya que:

$$\overline{X\,Y} = \frac{[f_{xy}\ X\ Y]}{N}$$

Supongamos una dependencia en que $y = x$; en este caso

$$\sigma_X \sigma_Y \cdot r = \sigma_X^2$$

o sea: $r = 1$

Si hay independencia entre x e y

$$\left[f(X - \bar{X})(Y - \bar{Y}) \right] << 1 \quad \text{(mucho menor que 1)}$$

y luego $r \sim 0$

Apliquemos la fórmula (18) al ejemplo que estábamos tratando.

$\left[f_{xy} \quad X\,Y \right]$	
2	6
6	
2	
2	
4	
16	6 = 10 : 14 = 0.71

Para calcular $\left[f_{xy} \quad X\,Y \right]$ se procede del siguiente modo: Partimos con el valor de X, lo multiplicamos por el número de rayitas que hay en el cuadro y luego multiplicamos por Y. Esto lo podemos expresar por:

$$X \cdot f_{xy} \cdot Y$$

Sea el cuadro de la pág. 57. Queremos calcular $\left[f_{xy}\, X\, Y \right]$. Tenemos $X = -2$. El primer cuadro tiene 0 rayitas, el segundo también; el tercero tiene 1 rayita, luego:

$$(-2) \cdot 1 \cdot (-1) = 2$$

El 4°, 5° y 6°, cuadro también tienen 0 rayitas (o sea $f_{xy} = 0$). Para el 7° cuadro se tiene:

$$(-2) \cdot 1 \cdot 3 = -6$$

y así se sigue con todos los valores de X. Naturalmente que esto mismo se puede hacer partiendo de Y.

Según los resultados del ejemplo de las págs. 59 y 60 teníamos:

$$\bar{X}\,\bar{Y} = -0.28 \quad \sigma_X = 1.8 \quad \sigma_Y = 1.9$$

Aplicando la fórmula (18) obtenemos:

$$r = \frac{0.99}{1.8 \quad 1.9} = 0.29$$

Luego elegiremos como coeficiente de correlación el valor:

$$r = 0.3$$

EXACTITUD DEL MEDIO ARITMETICO:

Supóngase que se efectúan varias series de observaciones y cada una de estas conste de N, N', ..., $N^{(n)}$ datos estadísticos de una misma magnitud. Sea M el numero de series de observaciones. Se tendría:

$$M \begin{cases} N \ldots\ldots\ldots x \\ N' \ldots\ldots\ldots x' \\ \cdot\cdot \\ \cdot\cdot \\ \cdot\cdot \\ N^{(n)} \ldots\ldots x^{(n)} \end{cases}$$

Supongamos por ahora que

$$N = N' \ldots\ldots\ldots = N^{(n)}$$

o sea que el número de observaciones que se hace en cada serie sea el mismo. Entonces el valor medio vale:

$$\bar{x} = \frac{x + \ldots + x' \ldots + x'' \ldots + \ldots}{M\ N}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{M}\left[\frac{x + \ldots}{N} + \frac{x' + \ldots}{N} + \frac{x'' + \ldots}{N}\right] = \frac{\bar{x} + \bar{x}' + \bar{x}'' + \ldots}{M}$$

Supongamos que el coeficiente de correlación entre x y x' sea cero, o sea, sean independientes. Llamemos x' = y. Queremos saber si conocida la dispersión de x e y podemos conocer la de (x + y). Según fórmula (7) tenemos:

$$\sigma^2_{x+y} = \frac{\left[f\ \left\{x + y - (\bar{x} + \bar{y})\right\}^2\right]}{N}$$

$$\sigma^2_{x+y} = \frac{\left[f(x - \bar{x})^2\right]}{N} + \frac{\left[f(y - \bar{y})^2\right]}{N} + \frac{2\left[f(x - \bar{x})(y - \bar{y})\right]}{N}$$

de donde: $\sigma^2_{x+y} = \sigma^2_x + \sigma^2_y + 2\, r\, \sigma_x \cdot \sigma_y$

pero si tenemos independencia r = 0

$$\sigma^2_{x+y} = \sigma^2_x + \sigma^2_y$$

Tenemos también:

$$\sigma^2_{x + x_2 + \ldots + x_n} = \sigma^2_{x_1} + \sigma^2_{x_2} + \ldots + \sigma^2_{x_n}$$

si ahora tenemos $\sigma_x = \sigma_{x'}$ y se trata de un mismo fenómeno podemos poner:

$$\sigma^2_{x + x'} = 2\sigma^2_x$$

$$\sigma^2_{x + x' + x''} = 3\sigma^2_x$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\sigma^2_{x+x'+\ldots} = M\,\sigma^2_x$$

luego:

$$\sigma_{x+x'+\ldots} = \sqrt{M}\,\sigma_x$$

de donde;

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{M}}$$

si tomamos el número de repeticiones M = N se tiene;

$$\boxed{\varepsilon = \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}} \qquad (19)$$

es el error medio del promedio. Luego podemos poner

$$\bar{x} + \varepsilon = \bar{x} \pm \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}$$

Veamos un ejemplo: Sea el caso anterior en que vimos la estatura del curso (Ver págs. 46, 47 y 48)

$$N = 38 \quad \bar{x} = 172.88 \quad \sigma = 6.2$$

Aplicando la fórmula (19) tenemos;

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} = \frac{6.2}{6.2} = 1.0$$

Luego:

$$\bar{x} = 172.88 \pm 1.0$$

Veamos otro ejemplo: Supondremos que se ha medido una resistencia eléctrica 9 veces y se han obtenido los siguientes valores:

(Ver tabla en la sig. pág.)

R
834
835
836
831
835
835
838
835
837

Tenemos $R_o = 835$

$[R - R_o]$	
1	3
1	4
4	
1	
2	
9	7 = 2 ; 9 = 0.2

luego: $\bar{R} = 835 + 0.2 = 835.2$

Busquemos: $\left[(R - R_o)^2\right]$

0.64
0.64
10.24
17.64
14.44
0.64
3.24
37.48 ; 9 = 5.3

aquí f = 1 en todos los casos y h=1. Luego:

$$\sigma_R = \sqrt{5.3} = 2.3$$

$$\varepsilon_R = \frac{2.3}{3} = 0.8$$

Luego: $\bar{R} = 835.2 \pm 0.8$

Para mayor seguridad se pondría:

$$R = 835 \pm 1 \left[\Omega\right]$$

E S T U D I O D E U N A F U N C I O N

GENERALIDADES:

El problema que más frecuentemente se le presenta al experimentador es expresar en una relación matemática el resultado de su experiencia, o sea, encontrar una fórmula que interprete matemáticamente el fenómeno que estudia. Los resultados de las experiencias se pueden reducir a una tabla de valores entre las dos variables en observación.

En casi todos los casos se pueden encontrar a partir de la tabla de función una expresión analítica que relacione las dos variables. En este capítulo estudiaremos primero algunas propiedades de esa expresión y luego el modo de determinarla, basado sólo en los datos que arroja la experiencia (tabla de valores).

Pasaremos a ver algunas propiedades de esas funciones.

ESTUDIO NUMERICO DE LAS PROPIEDADES DE UNA FUNCION:

Cálculo de las diferencias: El primer método de investigación para estudiar una función consiste en la obtención o cálculo de las diferencias. Consideremos un conjunto de valores observados, representados por:

$$x_i, y_i \qquad i = 1, 2, 3 \ldots\ldots n$$

Los valores de x se supondrán equidistantes:

$$x_{i+1} - x_i = \Delta x$$

las diferencias primeras se definen como:

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i \qquad (1)$$

y las diferencias segundas por:

$$\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i \qquad (2)$$

del mismo modo, para $k > 1$ se tiene:

$$\Delta^k y_i = \Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i \qquad (3)$$

De (1) se tiene:

$$y_1 = y_0 + \Delta y_0$$

$$y_2 = y_1 + \Delta y_1 = (y_0 + \Delta y_0) + (\Delta y_0 + \Delta^2 y_0)$$

o sea:

$$y_2 = y_0 + 2\Delta y_0 + \Delta^2 y_0$$

$$y_3 = y_2 + \Delta y_2 = (y_0 + 2\Delta y_0 + \Delta^2 y_0) + (\Delta^2 y_1 + \Delta y_1)$$

$$= (y_0 + 2\Delta y_0 + \Delta^2 y_0) + (\Delta^3 y_0 + \Delta^2 y_0 + \Delta^2 y_0 + \Delta y_0)$$

$$y_3 = y_0 + 3\Delta y_0 + 3\Delta^2 y_0 + \Delta^3 y_0$$

Se vé que estos datos pueden representarse en forma simbólica en la siguiente forma:

$$y_1 = (1 + \Delta) y_0$$

$$y_2 = (1 + \Delta)^2 y_0$$

$$y_3 = (1 + \Delta)^3 y_0$$

En la cual $(1 + \Delta)$ actuaría como un operador sobre y_0. De igual modo estableceríamos que:

$$y_k = (1 + \Delta)^k \; y_o \qquad (4)$$

Veremos un ejemplo de cálculo de las diferencias. Supóngase que se ha obtenido la siguiente tabla como resultado de una experiencia (la tabla corresponde a la función $y = x^2$). Hacemos el cálculo de las diferencias.

Para obtener $\Delta y = 5,2$ por ejemplo, se tiene:

$$30,2 - 25,0 = 5,2$$

Para obtener $\Delta^2 y = 0.6$ por ejemplo, hacemos:

$$4,8 - 4,2 = 0,6$$

Las diferencias se colocan en columnas paralelas una al lado de otra y cada diferencia se va obteniendo efectuando la diferencia entre los valores de la columna que la antecede.

x	y	Δy	$\Delta^2 y$
4.0	16.0		
		4.2	
4.5	20.2		0.6
		4.8	
5.0	25.0		0.4
		5.2	
6.5	30.2		0.6
		5.8	
6.0	36.0		0.4
		6.2	
5.5	42.2		0.6
		6.8	
7.0	49.0		0.4
		7.2	
7.5	56.2		0.6
		7.8	
8.0	64.0		

Las diferencias se pueden seguir obteniendo indefinidamente, pero si las diferencias de orden n son constantes, las de orden n + 1, n + 2,..... etc., son nulas. A menudo suele usarse con ventaja la siguiente notación para definir las diferencias.

Si $y = f(x)$

$$\Delta y = \Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) \qquad (5)$$

y

$$\Delta^2 y = \left[f(x + 2\ \Delta x) - f(x + \Delta x) \right] - \left[f(x + \Delta x) - f(x) \right]$$

o sea;

$$\Delta^2 y = f(x + 2\ \Delta x) - 2\ f(x + \Delta x) + f(x) \qquad (6)$$

Daremos algunas reglas para operar con Δ ;

$$\Delta(y + z) = \Delta y + \Delta z$$

$$\Delta(c\ y) = c \Delta y$$

$$\Delta x^n = (x + \Delta x)^n - x^n = n\ \Delta x\ x^{n-1} + \ldots\ldots$$

$$\Delta(a_n\ x^n + \ldots\ldots + a_o) = n\ a_n\ \Delta x\ x^{n-1} + \ldots\ldots$$

$$\binom{x}{n}\ \frac{(x+1)\ x \ldots\ldots (x - n + 2)}{n!} - \frac{x(x-1)\ldots(x-n+1)}{n!}$$

$$\binom{x}{n} = \frac{x \ldots\ldots (x - n + 2)}{n!} \qquad (x + 1 - (x - n + 1)$$

$$\Delta \binom{x}{n} = \frac{x(x-1)\ldots\ldots(x-n+2)}{(n-1)!} = \binom{x}{n-1}$$

Definiremos ahora $\bar{\Delta} y$:

$$\bar{\Delta} y = y_1 - y_{1-1}$$

o también: $$\bar{\Delta} y = f(x) - f(x - \Delta x) \qquad (7)$$

o sea $\bar{\Delta} y$ es la diferencia hacia atrás, así como Δy es la diferencia hacia adelante. Luego se tiene:

$$\Delta y_n = \bar{\Delta} y_{n+1} \qquad (8)$$

Supongamos una tabla de valores en que elegimos como punto origen (x_o, y_o)

x	y	Δy	$\Delta^2 y$
x-2	y_{-2}		
x-1	y_{-1}		
x_o	y_o	Δy_{-1}	
x_1	y_1	Δy_o	$\Delta^2 y_{-1}$
x_2	y_2	Δy_1	$\Delta^2 y_o$

según (8) $$\Delta y_o = \bar{\Delta} y_1$$

lo que se vé claramente en el cuadro. Se tiene también:

$$\Delta^2 y_{-1} = \Delta(\Delta y_{-1}) = \Delta(\bar{\Delta} y_o) = \Delta\bar{\Delta} y_o$$

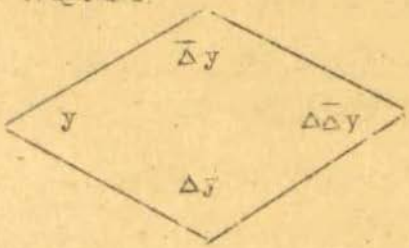
$$\bar{\Delta}^2 y_1 = \bar{\Delta}(\bar{\Delta} y_1) = \bar{\Delta}(\Delta y_o) = \bar{\Delta}\Delta y_o$$

pero: $$\Delta(\bar{\Delta} y_o) = \bar{\Delta}(\Delta y_o)$$

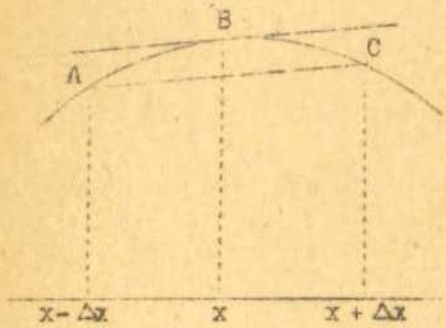
luego: $\Delta\bar{\Delta}y_o = \bar{\Delta}\Delta y_o$

$\Delta^2 y_{-1} = \Delta^2 y_1$

Las diferencias, pues, las podemos representar en el siguiente diagrama:



DERIVACION NUMERICA:



Sea una curva cualquiera. Si se traza una secante entre dos puntos de la curva, sabemos que ésta tiene una tangente paralela a la secante. En el caso general la abscisa del punto de tangencia no corresponde al punto media de las abscisas de los puntos extremos de la secante. Sin embargo en las parábolas, las abscisas de ambos puntos coinciden. Consideremos este caso:

Impongamos la condición de que la parábola pase por los puntos A, B y C.

por pasar por A:

$$f(x - \Delta x) = y - \Delta y = a(x - \Delta x)^2 + b(x - \Delta x) + c \quad (1)$$

por pasar por B:

$$f(x) = y = a x^2 + b x + c \quad (2)$$

por pasar por C:

$$f(x + \Delta x) = y + \Delta y = a(x + \Delta x)^2 + b(x + \Delta x) + c \qquad (3)$$

Si restamos (1) de (2) se tiene:

$$\bar{\Delta} y = 2\, a\, x\, \Delta x - a(\Delta x)^2 + b\, \Delta x \qquad (4)$$

si restamos (3) de (2) tenemos:

$$\Delta y = 2\, a\, x\, \Delta x + a(\Delta x)^2 + b\, \Delta x \qquad (5)$$

sumemos (4) y (5)

$$\Delta y + \bar{\Delta} y = 2(2\, a\, x + b)\, \Delta x$$

o sea:
$$\frac{\Delta y + \bar{\Delta} y}{2\, \Delta x} = 2\, a\, x + b$$

pero según (2)
$$y' = 2\, a\, x + b$$

luego:
$$y' = \frac{\Delta y + \bar{\Delta} y}{2\, \Delta x} \qquad (6)$$

Con esto hemos obtenido un método para sacar la derivada de una función a base de su tabla de valores, ya que en un intervalo pequeño podemos asimilar la función a un arco de parábola. Podemos poner:

$$y' \simeq \frac{\frac{\Delta y + \bar{\Delta} y}{2}}{\Delta x} \qquad (7)$$

Luego para obtener la derivada se busca la semi-suma de las diferencias consecutivas y se divide por el intervalo.

Vamos un ejemplo de obtención de derivadas. Sea la tabla de valores provenientes de la función $y = x^3$ cuya derivada vale $y' = 3\, x^2$.

x	y	Δy	$\frac{1}{2}(\Delta y \bar{\Delta} y)$	y'
1.00	1.00			
		0.16		
1.05	1.16		0.16	3.3
		0.17		
1.10	1.33		0.18	3.6
		0.19		
1.15	1.52		0.20	4.0
		0.21		
1.20	1.73		0.21	4.3
		0.22		
1.25	1.95			

Más adelante veremos algunas aplicaciones de la derivada en la determinación de funciones a partir de la tabla de valores.

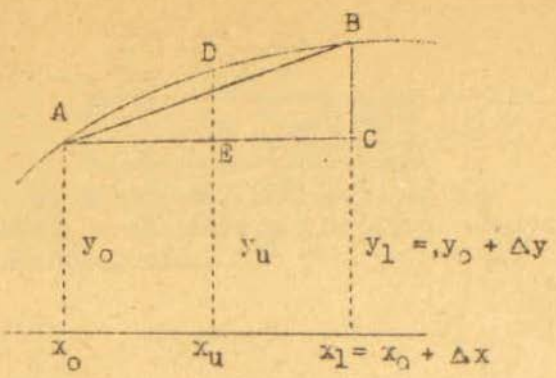
INTERPOLACION:

Cuando a partir de una tabla de valores, se encuentra una ecuación que relacione las dos variables x e y, se puede obtener por medio de ella el valor de y que corresponde a un valor arbitrario de x. Pero frecuentemente se desea obtener un valor aproximado de y que corresponde a un valor cualquiera de x, sin establecer previamente la relación que vincula a las variables.

Para el efecto se han ideado diversos métodos de interpolación que corresponden a las fórmulas que luego trataremos y que más adelante emplearemos en las fórmulas de integración numérica.

1) Interpolación lineal:

El procedimiento consiste en considerar el arco confundido con la cuerda y dividirlo proporcionalmente. Esto es aplicable cuando el intervalo es pequeño. Como datos ini -



-ciales es necesario conocer y e y_1, valores de la función correspondiente a x y x_1.

Supóngase que queremos calcular y_u correspondiente al valor:

$$x_u = x_o + u\,\Delta x$$

siendo

$$< 0 < u < 1$$

luego:

$$u = \frac{x_u - x_o}{\Delta x} \qquad (1)$$

u significa la parte alícuota de Δx respecto $x_u - x_o$.

Por semejanza de triángulos tenemos:

$$\frac{DE}{AE} = \frac{BC}{AC}$$

o sea:

$$\frac{y_u - y_o}{x_u - x_o} = \frac{y_1 - y_o}{x_1 - x_o}$$

$$\frac{y_u - y_o}{u\ \Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

de donde: $$\boxed{y_u = y_o + u\ \Delta y} \qquad (2)$$

Cuando se quiere interpolar en una tabla de funciones trigonométricas generalmente se calcula inmediatamente el factor u Δ y de la siguiente relación:

$$\frac{\Delta x}{u\ \Delta x} = \frac{\Delta y}{u\ \Delta y}$$

de donde:

$$u\ \Delta y = \frac{\Delta y}{\Delta x}\ (x_u - x_o) \qquad (3)$$

Veamos un ejemplo de interpolación lineal en una tabla de funciones trigonométricas. Sea la función y = sen x. Nos damos como datos iniciales:

x	y	Δ y
30°20'	0,5050	0,0025
30°30'	0,5075	

Queremos calcular los valores de sen 30°22',24; 26', 28'.

En estos casos:

$$u = 0,2;\ 0,4;\ 0,6;\ 0,8$$

Y aplicando las fórmulas obtenemos los valores que aparecen en el cuadro.

x	y
30°20'	0,5050
22'	0,5055
24'	0,5060
26	0,5065
28'	0,5070
30°30'	0,5075

Veremos ahora algunos casos en que la interpolación lineal no sirve por ser muy grande el intervalo Δx.

Sea siempre la función y = sen x.

Como datos iniciales tenemos;

x	y	Δy
0°	0,0000	0,7071
45°	0,7071	

Queremos calcular sen 30°

u vale entonces; $u = \frac{2}{3}$

Aplicando la fórmula tenemos;

$$y_u = 0 + \frac{2}{3} \quad 0,7071 = 0,4714$$

lo que dá sólo la primera cifra decimal correcta.

Como se vé para intervalos grandes esta fórmula es enteramente inaplicable. Sin embargo, es de gran utilidad para la interpolación en tablas de funciones trigonométricas ya que en estos casos el intervalo es del orden de los segundos o minutos y el número dé cifras no es muy grande.

Cuando el intervalo es más grande o la precisión mayor se usan otros métodos que pasamos a estudiar.

2) Interpolación de segundo grado:

Este método se basa en encontrar una parábola de eje vertical que se asemeje más a la curva que a la recta. Para determinar esta parábola necesitamos imponerle la condición de que pase por tres puntos. Sean y_{-1}, y_o e y_1 estos tres puntos que corresponden a las abscisas $x_o - \Delta x$, x_o y $x_o + \Delta x$. Sea:

$$y = a + b\,x + c\,x^2$$

la parábola. Impongámosle la condición de que pase por los 3 puntos.

Por pasar por y_{-1}

$$y_{-1} = a + b(x_o - \Delta x) + c(x_o - \Delta x)^2 \qquad (1)$$

Por pasar por y_o

$$y_o = a + b\,x_o + c\,x_o^2 \qquad (2)$$

Por pasar por y_1

$$y_1 = a + b(x_o + \Delta x) + c(x_o + \Delta x)^2 \qquad (3)$$

restando (1) de (3) tenemos:

$$y_1 - y_{-1} = 2\,b\,\Delta x + 4\,c\,x_o\,\Delta x$$

$$(y_1 - y_o) + (y_o - y_{-1}) = 2(b\,\Delta x + 2\,c\,x_o\,\Delta x)$$

luego:

$$\frac{\Delta y_o + \bar{\Delta} y_o}{2} = b\,\Delta x + 2\,c\,x_o\,\Delta x \qquad (4)$$

Si sumamos (1) y (3) y le restamos dos veces (2), se tiene:

$$y_{-1} + y_1 = 2a + 2b x_o + 2c x_o^2 + 2c(\Delta x)^2$$

$$2 y_o = 2a + 2b x_o + 2c x_o^2$$

$$\Delta^2 y_{-1} = \Delta\bar{\Delta} y_o = 2c(\Delta x)^2 \qquad (5)$$

El sistema está expresado por (2), (4) y (5) lo que permite resolverlo fácilmente. Supóngase que queremos encontrar un valor y_u correspondiente a un valor de

$$x = x_o + u\Delta x \qquad (6) \qquad 0 < u < 1$$

de modo que:

$$u = \frac{x - x_o}{\Delta x} \qquad (7)$$

$$y_u = f(x_o + u\,\Delta x)$$

$$y_u = a + b(x_o + u\,\Delta x) + c(x_o + u\,\Delta x)^2$$

Desarrollando tenemos:

$$y_u = a + b\,x_o + c\,x_o^2 + u(b\,\Delta x + 2c\,x_o\,\Delta x) + u^2 c(\Delta x)^2$$

y reemplazando los valores obtenidos en (2), (4) y (5) tenemos:

$$\boxed{y_u = y_o + \frac{\Delta y_o + \bar{\Delta} y_o}{2} u + \frac{\Delta\bar{\Delta} y_o}{2} u^2} \qquad (8)$$

Comparemos el grado de aproximación de este método con el de interpolación lineal. Sea nuevamente la función y = sen x. Nos damos los valores:

	x	y	Δy	$\Delta^2 y$
x_{-1}	0°	0.000		
			0,383	
x_o	22°30'	0,383		-0.059
			0,324	
x_1	45°	0,707		

Busquemos el seno de 30° por interpolación

$$u = \frac{1}{3}$$

Aplicando la fórmula (8) tenemos:

$$y_u = 0,383 + \frac{1}{3} \quad 0,3535 \quad - \frac{1}{18} 0,059$$

$$y_u = \text{sen } 30° = 0,498$$

Hay un pequeño error de un $\frac{1}{2}\%$. Pero aún este error de $\frac{1}{2}\%$ es grande, error que es debido a que el intervalo de interpolación es muy grande.

Veamos un ejemplo de interpolación en una tabla de valores arbitrarios. Sea la tabla:

(Ver tabla en la pág. siguiente)

Queremos interpolar el valor de y correspondiente a x = 4.9. Nos apoyamos en los valores 4.4; 4.8 y 5.2 tomando como x_o el valor 4.8.

$$u = \frac{1}{4} = 0.25$$

	x	y	Δy	$\Delta^2 y$
	3.2	1.078		
	3.6	1.079		
	4.0	1.071		
x_{-1}	4.4	1.062	-18	
x_0	4.8	1.044	-34	-16
x_1	5.2	1.010		
	5.6	953		

luego tenemos que calcular $y_{o.25}$. Según (8) tenemos:

$$y_{o.25} = 1.044 - 26\,\frac{1}{4} - 8\,\frac{1}{4^2}$$

$$y_{o.25} = 1.044 - 6.5 - 0.5 = 1.037$$

luego para $x = 4.9$ $y = 1.037$

Veamos otro ejemplo. Sea la función $y = \log x$ (ver pág. 84)

Queremos calcular log 3. Tenemos:

$\Delta x = 2$ $x_o = 4$

		x	y	Δy	$\Delta^2 y$
	x_{-1}	2	0,301		
				0,301	
	x_o	4	0,602		-0,125
				0,176	
x_{-1}	x_1	6	0,778		-0,041
				0,135	
x_o		8	0,903		0,038
				0,097	
x_1		10	1,000		

$$u = -\frac{1}{2} = -0.5$$

aplicando la fórmula se tiene:

$$y_u = \log 3 = 0,602 - 0,238\ \frac{1}{2} - 0,062\ \frac{1}{4}$$

$$y_u = 0,602 - 0,119 - 0,016 = 0,467$$

o sea:

$$\log 3 = 0,467$$

Si queremos calcular log 9, tomamos $x_o = 8$; u resulta 0.5. luego se tiene :

$$y_{o.5} = \log 9 = 0,903 + 0,116\ \frac{1}{2} - 0,020\ \frac{1}{4}$$

$$y_{o.5} = \log 9 = 0,903 + 0,058 - 0,005 = 0,956$$

luego:

$$\log 9 = 0,956$$

de donde, con más precisión;

$$\log 3 = 0,478$$

Transformaremos la fórmula (8) de la siguiente manera;

$$y_u = y_o + \frac{\Delta y_o}{2} u + \frac{\bar{\Delta} y_o}{2} u + \frac{\Delta \bar{\Delta} y_o}{2} u^2$$

Sumémosle y restémosle $\frac{\Delta y_o}{2}$ tenemos;

$$y_u = y_o + \Delta y_o\, u + \frac{\bar{\Delta} y_o - \Delta y_o}{2} u + \frac{\Delta^2 y_{-1}}{2} u^2$$

p sea;

$$y_u = y_o + \Delta y_o\, u + \frac{\Delta^2 y_{-1}}{2} u(u - 1)$$

pero

$$u = \frac{x - x_o}{\Delta x}$$

y

$$u - 1 = \frac{x - x_o}{\Delta x} - 1 = \frac{x - x_1}{\Delta x}$$

y reemplazando:

$$y_u = y_o + \frac{\Delta y_o}{\Delta x}(x - x_o) + \frac{\Delta^2 y_{-1}}{(\Delta x)^2}(x - x_o)(x - x_1) \quad (9)$$

Así escrita la fórmula de interpolación de segundo grado tiene forma similar a las fórmulas de interpolación de grado n, que pasaremos a deducir.

3) Interpolación de grado n.

En este procedimiento asimilamos la función a una parábola de grado n cuya ecuación es;

$$y = a_o + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n \quad (1)$$

Para determinar los coeficientes le impondremos la condición que se satisfaga para los n+1 valores observados. Al considerar la fórmula de interpolación se supone que

los valores observados están en progresión aritmética, o sea que:

$$x_k = x_{k-1} + \Delta x = x_o + k\,\Delta x \qquad k = 1,2 \ldots n \quad (2)$$

Se observan n+1 valores; luego son nulas todas las diferencias de orden superior a n.

Pongamos: $$u = \frac{x - x_o}{\Delta x} \qquad (3)$$

y recordemos la fórmula (4) de la pág. 71.

$$y_k = (1+\Delta)^k y_o = y_o + k\,\Delta y_o + \frac{k(k-1)}{2!}\Delta^2 y_o + \ldots$$

$$+ \frac{k(k-1)\ldots\ldots(k-n+1)}{n!}\Delta^n y_o \qquad (4)$$

Pues bien, escribamos la función de x

$$F(x) = y_o + \binom{n}{1}\Delta y_o + \binom{n}{2}\Delta^2 y_o + \ldots\ldots + \binom{n}{n}\Delta^n y_o$$

Observamos que F(x) coincide, según la fórmula (3) y la (4) recién citadas, con y para las (n+1) abscisas $x = x_o, x_1 \ldots\ldots x_n$. Pero dos funciones de grado n, si coinciden en (n+1) abscisas, son idénticas (*). De donde la fórmula de interpolación de grado n es:

$$y_u = y_o + \binom{n}{1}\Delta y_o + \binom{n}{2}\Delta^2 y_o + \ldots\ldots + \binom{n}{n}\Delta^n y_o \qquad (5)$$

Veamos un ejemplo de la aplicación de esta fórmula.

Sea la tabla de valores (ver tabla de la pág. 84):

Queremos obtener el valor de y correspondiente a x = 2,2 tomando n = 3.

(*) En efecto, si los valores de

$$f(x) = a_n x^n + \ldots\ldots + a_o \; ; \; g(x) = b_n x^n + \ldots\ldots + b_o \quad //$$

Tomamos $x_o = 1$

Aplicando la fórmula (5) nos queda:

$$y_u = 2,105 + 0,703 \cdot 1,2 + 0,103 \frac{1,2 \cdot 0,2}{2} + 0,081 \frac{1,2 \cdot 0,2 \cdot (-0,8)}{6}.$$

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
1	2,105			
		0,703	0,103	
2	2,808		0,184	0,081
		0,806		
3	3,614		0,263	0,079
		0,990		
4	4,604		0,341	0,078
		0,253		
5	5,857		0,422	0,081
		1,594		
6	7,451		0,502	0,080
		2,016		
7	9,467			
		2,518		
8	11,985			

$$y_u = 2,958$$

---

son iguales para las abscisas x_o, x_1 ------- x_n, la diferencia $f(x) - g(x)$, que es un polinomio de grado n, tiene x_o, x_1,... x_n por raíces; pero un polinomio de grado n puede tener más de n raíces, sólo cuando se anula idénticamente.

o sea a $x = 2,2$ corresponde $y = 2,958$

Alisamiento:

Cuando se tiene una tabla de valores a menudo se desea hacer un gráfico de las dos variables para obtener una curva representativa del fenómeno que se estudia. Suele suceder que la función que se trata de representar gráficamente es algo irregular y entonces la curva en vez de hacerse pasar por los puntos, se dibuja de modo que pase entre ellos.

O sea los puntos muy altos se bajan un poco y los muy bajos se suben un poco. Buscaremos una fórmula numérica para realizar esto.

Se tienen los puntos: y_{-1} ; y_o ; y_1

Supóngase que queremos calcular la corrección para y_o. Podríamos recurrir a promediar los tres valores y_{-1}, y_o, y_1 pero esta sería una corrección demasiado exagerada, En vez de esto recurrimos a promediar estos tres valores pero dándole coeficiente dos de importancia al valor central (y_o).

O sea:

$$y_o = \frac{y_{-1} + 2\,y_o + y_1}{4} \qquad (1)$$

Esta fórmula es conocida con el nombre de "Fórmula del promedio móvil". Trazando el gráfico con los valores y_0 se obtiene una curva más lisa.

Veamos un ejemplo numérico de aplicación de esta fórmula. Sea la tabla:

x	y	$\hat{y}$
3	126	---
4	138	137
5	144	143
6	147	147
7	148	147
8	146	145
9	140	137
10	123	---

El alisamiento tiene gran empleo e importancia en la construcción de los gráficos estadísticos cuyo estudio se hace en el capítulo de estadística de este mismo volumen.

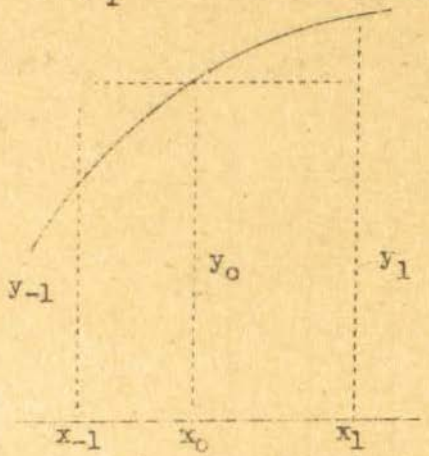
Integración NUMERICA:

Deduciremos en este párrafo las fórmulas de Simpson para la integración numérica.

La idea de Simpson consiste en asimilar una parábola a la función. Para determinar las constantes se impone la condición de que pase por tres puntos. Por este método podemos encontrar la integral de una función a partir de su tabla de valores.

Supongamos que queremos calcular la integral:

$$\int_{x_{-1}}^{x_1} y\,dx = \int_{x_0-\Delta x}^{x_0+\Delta x} y\,dx \qquad (1)$$



Un valor arbitrario de x comprendido entre x1 y x-1 está dado por;

$$x = x_0 + u\,\Delta x$$

Si en (1) reemplazamos y por el valor obtenido en la pág. 85. fórmula (3) tenemos;

$$\int_{x_{-1}}^{x_1} y\,dx = \int_{-1}^{1} \left(y_0 + \frac{\Delta y_0 + \bar{\Delta} y_0}{2} u + \frac{\Delta \bar{\Delta} y_0}{2} u^2\right) \Delta x\,du \qquad (2)$$

ya que para

$x = x_0 + \Delta x \qquad u = 1 \qquad dx = \Delta x\,du$

$x = x_0 - \Delta x \qquad u = -1$

Luego tenemos;

$$\int_{-1}^{1} \frac{\Delta y_0 + \bar{\Delta} y_0}{2} u\,du = \Delta x \frac{\Delta y_0 + \bar{\Delta} y_0}{2} \left|\frac{u^2}{2}\right| = \Delta x \frac{\Delta y_0 + \bar{\Delta} y_0}{2} \left|\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right| =$$

$$\int_{x_0 - \Delta x}^{x_0 + \Delta x} y \, dx = \int_{x_{-1}}^{x_1} y \, dx = \Delta x\left(2\, y_0 + \frac{\Delta\bar{\Delta}\, y_0}{3}\right)$$

o sea:

$$\boxed{\int_{x_{-1}}^{x_1} y \, dx \approx 2 \Delta x\left(y_0 + \frac{\Delta\bar{\Delta} y_0}{6}\right)} \qquad (3)$$

que es la primera forma de la fórmula de Simpson para la integración numérica. La forma (3) indica que la integral vale el área del rectángulo de base $2\Delta x$ y altura y_0 mas la corrección debido a que la función no es una recta.

Si se hubiera tratado de una parábola de tercer grado el resultado hubiera sido igual pues observando la integración se vé que los términos impares se van.

La fórmula (3) la podemos transformar como sigue:

Recordando que:

$$\Delta\bar{\Delta} y_0 = (y_1 - y_0) - (y_0 - y_{-1}) = y_{-1} - 2\, y_0 + y_1$$

y reemplazando este valor en (3) se tiene:

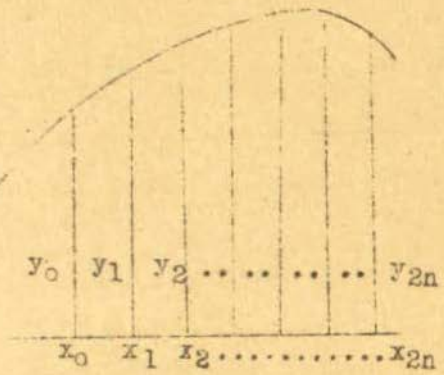
$$\int_{x_{-1}}^{x_1} y \, dx = 2 \Delta x\left(y_0 + \frac{y_{-1} - 2\, y_0 + y_1}{6}\right)$$

luego:

$$\boxed{\int_{x_{-1}}^{x_1} y \, dx = \frac{\Delta x}{3}\left(y_{-1} + 4\, y_0 + y_1\right)} \qquad (4)$$

Supongamos que ahora queremos avaluar la integral de una función en el intervalo $a < x < b$. Para eso divi-

-dimos el intervalo b - a en un número par de partes (2 n), siendo cada parte igual a Δx. En seguida por cada grupo de tres puntos pasamos parábolas sucesivas de eje vertical y efectuamos la integral por suma de las integrales parciales. O sea:



$$\int_a^b y\,dx = \int_{x_0}^{x_2} y\,dx + \int_{x_2}^{x_4} y\,dx + \ldots\ldots + \int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} y\,dx \qquad (5)$$

según 4 se tiene:

$$\int_{x_0}^{x_2} y\,dx = \frac{\Delta x}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

$$\int_{x_2}^{x_4} y\,dx = \frac{\Delta x}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4)$$

$$\int_{x_4}^{x_6} y\,dx = \frac{\Delta x}{3}(y_4 + 4y_5 + y_6)$$

.....

$$\int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} y\,dx = \frac{\Delta x}{3}(y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n})$$

Reemplazando estos valores en (5) obtenemos:

$$\int_a^b y\,dx = \int_{x_0}^{x_{2n}} y\,dx \approx \frac{\Delta x}{3}(y_0 + 4\ y_1 + 2\ y_2 + 4\ y_3 + \ldots + 2\ y_{2n-2} + 4\ y_{2n-1} + y_{2n}) \qquad (6)$$

que es la fórmula de Simpson.

Debe notarse que n queda definido por;

$$2\,n\,\Delta x = b - a$$

luego:
$$n = \frac{b - a}{2\,\Delta x} \qquad (7)$$

de donde;
$$\Delta x = \frac{b - a}{2n} \qquad (8)$$

Veamos algunos ejemplos del uso de estas fórmulas. Queremos avaluar la integral;

$$4\int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2} = \pi \text{ tomando } 2n = 4$$

Calculemos la tabla de valores. La función es:

$$y = \frac{4}{1 + x^2}$$

y según (8)
$$\Delta x = \frac{1}{4} = 0.25$$

x	y
0,00	4.0000
0,25	3,7647
0,50	3.2000
0.75	2.5600
1.00	2.0000

$$4\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{12}\left[4.0000 + 4(3.7647 + 2.5600) + 2(3.2000) + 2.000\right]$$

Luego:

$$\pi = \frac{37.6988}{12} = 3.1416$$

Veremos otro ejemplo de integración numérica. Encontrar el valor de la integral.

$$I = \int_0^2 \sqrt{4 + x^3}\, dx$$ tomando 2 n = 4

Calculemos la tabla de valores. La función es:

$$y = \sqrt{4 + x^3} \qquad y \quad \Delta x = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0.5$$

Luego:

$$I = \frac{1}{6}\left[2.000 + 4(2.031 + 2.716) + 2\ 2.236 + 3.464\right]$$

$$I = \frac{1}{6}\ (2.000 + 18.988 + 4.472 + 3.454)$$

x	y
0.0	2.000
0.5	2.031
1.0	2.236
1.5	2.716
2.0	3.464

o sea:

$$I = 4.821$$

FORMULA DEL QUINCEAVO:

La fórmula de Simpson rige con exactitud para funciones de segundo y tercer grado. Por lo tanto:

$$\int_a^b y \, dx = S + \alpha (\Delta x)5 + (\Delta x)6 + \ldots.$$

$$\int_a^b y \, dx = S + \varepsilon \qquad \varepsilon = \text{error}$$

siendo S el valor dado por la fórmula de Simpson. Se comete un error de $\alpha(\Delta x)5 + (\Delta x)6 + \ldots.$ debido a que ésta es válida hasta la función de tercer grado y al integrar se convierte en función de cuarto grado.

Al ampliar el intervalo de integración queda:

$$\int_{x_o}^{x_{2n}} y \, dx = S + \varepsilon$$

$$\int_{x_o}^{x_{2n}} y \, dx = S(\Delta x) + \beta (\Delta x)5 + (\Delta x)6 + \ldots. (1) \qquad x_{2n} = x_o + 2n \Delta x$$

siendo $S(\Delta x)$ el valor que da la fórmula de Simpson tomando entre cada punto de intervalo Δx.

Si tomamos un intervalo $\frac{\Delta x}{2}$

$$x_{2n} = x_o + 4n \left(\frac{\Delta x}{2}\right)$$

$$\int_{x_o}^{x_{2n}} y \, dx = S\left(\frac{\Delta x}{2}\right) + 2\beta \left(\frac{\Delta x}{2}\right)5 + \left(\frac{\Delta x}{2}\right)6 + \ldots. \quad (2)$$

Multiplicando (2) por 16 y restando de ella (1) se tiene:

$$15 \int_{x_o}^{x_{2n}} y \, dx = 15\, S\left(\frac{\Delta x}{2}\right) + S\left(\frac{\Delta x}{2}\right) - S(\Delta x)$$

de donde:

$$\int_{x_0}^{x_{2n}} y\,dx = S\left(\frac{\Delta x}{2}\right) + \frac{S\left(\frac{\Delta x}{2}\right) - S(\Delta x)}{15} \qquad (3)$$

que es la fórmula del quinceavo. O sea si hemos calculado el valor de una integral con un intervalo (Δx) y queremos saber si este no es muy grande, calculamos la integral con $(\frac{\Delta x}{2})$ y calculamos por medio de (3) un valor más exacto que nos permite ver si el intervalo (Δx) era muy grande o no.

Además:

$$\beta(\Delta x) = \varepsilon = \text{error}$$

y de (3) y (2) se deduce:

$$\varepsilon = \frac{16}{15}\left[S\left(\frac{\Delta x}{2}\right) - S(\Delta x)\right]$$

Veremos un ejemplo. Calcular:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} = \text{Log } 2 \qquad \text{se tiene; } y = \frac{1}{x}$$

x	y
1,00	1,00000
1,25	0,80000
1,50	0,66667
1,75	0,57143
2,00	0,50000

Si tomamos $\Delta x = 0,5$ se tiene:

$$S(\Delta x) = \frac{1}{6}\,(0,66667 \cdot 4 + 1.00000 + 0,50000)$$

$$S(\Delta x) = 0,69443$$

Si tomamos $\Delta x = 0,25$ tenemos:

$$S\left(\frac{\Delta x}{2}\right) = \frac{1}{12}\ (0,66667 \cdot 2 + 1,37143 \cdot 4 + 1,50000)$$

$$S\left(\frac{\Delta x}{2}\right) = 0,69325$$

Luego:

$$\text{Log } 2 = 0,69325 - \frac{0,00118}{15}$$

$$\text{Log } 2 = 0,69325 - 0,00008$$

$$\text{Log } 2 = 0,69316$$

siendo su valor verdadero

$$\text{Log } 2 = 0,69315$$

Con esto damos por terminado el estudio numérico de las propiedades de una función y pasamos a estudiar la determinación de la función misma.

DETERMINACION DE FUNCIONES:

Como se dijo al comenzar el capítulo tiene gran importancia para el experimentador, conocer a partir de la tabla de valores (resultado de su experiencia) una ecuación que liga las variables en observación.

Como se expresó también anteriormente las diferencias constituirán nuestro principal elemento para el tratamiento de este problema. Veremos a continuación algunos métodos generales para obtener ecuaciones que representan tipos especiales de datos.

Métodos generales.-

1) Se tiene un cierto número de valores (x_i, y_i). Si los valores x_i forman una progresión aritmética y las

diferencias de orden r son constantes, la ecuación que liga a ambas variables es:

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\ldots + a_r x^r \qquad (1)$$

Si las diferencias de orden r son constantes todas las diferencias de orden superior son nulas. Luego según fórmula (5) de la pág. 86 se tiene;

$$y_u = y_0 + \binom{u}{1} \Delta y_0 + \binom{u}{2} \Delta^2 y_0 + \ldots\ldots + \binom{u}{r} \Delta^r y_0 \qquad (2)$$

siendo:

$$\binom{u}{r} = \frac{u(u-1)(u-2)\ldots(u-r+1)}{r!} \qquad (3)$$

el coeficiente de x^r en el desarrollo binomial de $(1 \quad x)^k$

En general los datos obtenidos experimentalmente no tienen ninguna diferencia constante, pero si pueden ser aproximadamente constantes. En estos casos podemos decir que la ecuación que liga ambas variables es aproximadamente del tipo de función de la fórmula (1).

Para familiarizar al alumno con la operatoria de estos problemas, verificamos esta propiedad para la función lineal y de segundo grado. Sea la función;

$y = a x + b$. tenemos además

$y + \Delta y = a(x + \Delta x) + b$ restando las ecuaciones nos queda: $y = a \Delta x$

pero Δx constante ya que los x_i están en progresión aritmética. O sea la primera diferencia de una función de primer orden es constante y por lo tanto la segunda diferencia es cero.

Veamos para la función de segundo grado:

Sea $y = a\ x^2 + b\ x + c$

$$y + \Delta y = a(x + \Delta x)^2 + b(x + \Delta x) + c$$

$$\Delta y = 2\ a\ x \Delta x + b\ \Delta x + a(\Delta x)^2$$

$$\Delta y + \Delta^2 y = 2\ a(x + \Delta x \Delta x + b \Delta x + a(\Delta x)^2$$

$$\Delta^2 y = 2\ a(\Delta x)^2$$

Luego la segunda diferencia de una función de segundo grado es constante y la tercera es cero.

Ejemplo:

Sea dada la siguiente tabla de valores

Se pide la ecuación que liga x e y.

x	y	Δy	$\Delta^2 y$
3	-17.4		
		1.1	
5	-16.3		2.1
		3.2	
7	-13.1		2.3
		5.5	
9	- 7.6		1.9
		7.4	
11	-0. 2		1.1
		8.5	
13	8.3		3.0
		11.5	
15	19.8		2.6
		14.1	
17	33.9		2.2
		16.3	
19	50.2		

Si aproximamos las segundas diferencias podemos decir que son constantes. Luego la función que relaciona x e y es:

$$y = a x^2 + b x + c$$

Para determinar a, b y c tomaremos un valor al principio, otro al medio y otro al final de la tabla (*). Por ejemplo; x = 5,9 y 17.

Tenemos el siguiente sistema:

$$25 a + 5 b + c = -16.3$$

$$81 a + 9 b + c = - 7.6$$

$$286 a + 17 b + c = 33.9$$

cuya solución es;

$$a = 0,2510 \quad b = - 1,340 \quad c = - 15,88$$

la ecuación sería:

$$y = 0,2510 x^2 - 1,340 x - 15,88$$

Colocaremos a continuación una tabla comparando los valores de la observación con los calculados por la fórmula:

(Ver Tabla en la pág. siguiente)

(*) Generalmente no se acepta este método para determinar las constantes dada su gran imprecisión.

Para la determinación de constantes, ver el capítulo "Determinación de Constantes" de este mismo volumen.

x	y_{obs}	$y_{calc.}$	dif.
3	-17,4	-17,6	-0,2
5	-16,3	-16,3	0,0
7	-13,1	-13,0	0,1
9	- 7,6	- 7,6	0,0
11	- 0,2	- 0,2	0,0
13	8,3	9,1	0,8
15	19,8	20,5	-0,7
17	33,9	33,9	0,0
19	50,2	49,3	0,9

2) Si se tiene un cierto número de valores (x_1, y_1) tales que los x_1 sean equidistantes y los correspondientes de y forman una progresión geométrica, la ecuación que relaciona las variables es:

$$y = k\ a^x$$

o sea y es una función exponencial. Si tomamos logaritmos de ambos miembros se tiene:

$$\log y = \log k + x \log a$$

que es una ecuación lineal en x y log y. Luego si los x forman una progresión aritmética, los log y también serán equidistantes, y se tiene:

$$\log y_1 - \log y_{1-1} = c$$

o sea:

$$\frac{y_i}{y_{i-i}} = e^c = C$$

luego:

$$y_i = C\, y_{i-1}$$

que indica que las y_i están en progresión geométrica.

Las diferencias de una función exponencial $k\, a^x$ constituyen otra exponencial, pues:

$$k\, a^{x+\Delta x} - k\, a^x = k(a^{\Delta x} - 1)\, a^x = k'\, a^x$$

por consiguiente, si los valores de las diferencias de orden r de y_i forman una progresión geométrica cuando los x_i están en progresión aritmética, se verifica la relación:

$$y = a_o + a_1 x + \ldots\ldots + a_{r-1}\, x^{r-1} + k\, a^x \quad (6)$$

si en (6) se tiene $r = 1$

queda: $y = a_o + k\, a^x$

Ejemplo:

Sea la tabla de valores. Queremos encontrar una expresión analítica que ligue las variables en observación:

x	y
0	60.00
1	51.66
2	44.46
3	38,28
4	32.94
5	28.32
6	24.42
7	21.06
8	18.06

Los x están en progresión aritmética y los y están en progresión geométrica:

Tenemos:

$$\frac{51.66}{60.00} = 0.861$$

$$\frac{44.46}{51.66} = 0.861$$

$$\frac{38.28}{44.46} = 0.861$$

.....

$$\frac{18.06}{21.06} = 0.861$$

o sea podemos decir que los y están en progresión geométrica. Luego la ecuación de relación entre x e y es:

$$y = k \quad a^x$$

Métodos particulares:

Pasaremos a resolver algunos problemas cuyo método de resolución no obedece a ninguna regla general, sino que depende de la mayor capacidad y habilidad del operador. Sin embargo algunos de estos problemas los podemos agrupar según sea el elemento de que nos valemos para su resolución.

A) Empleo de las diferencias.

Si tenemos una función exponencial de la forma:

$$y = c \quad a^x$$

$$y + \Delta y = c \quad a^{(x+\Delta x)}$$

$$\Delta y = c \quad a^{(x+\Delta x)} - c \; a^x$$

$$= c \quad a^x (a^{\Delta x} - 1)$$

$$a^{\Delta x} - 1 = C^{te},$$

pero

siempre que los x estén en progresión aritmética, luego:

$$y = k(\quad a^x)$$

La diferencia es proporcional al valor primitivo. Si tenemos una función logarítmica de la forma:

$$y = \log_a x$$

$$y + \Delta y = \log_a (x + \Delta x)$$

$$\Delta y = \log_a \frac{x + \Delta x}{x} = \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$$

desarrollando el segundo miembro en serie tenemos:

$$\log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{1}{M} \left[\frac{\Delta x}{x} - \left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta x}{x}\right)^3 - \ldots\ldots\right]$$

siendo $M = C^{te}$. el módulo del logaritmo o sea el logaritmo neperiano de la base

$$M = \text{Log}_a$$

Despreciando los términos de mayor grado que el primero se tiene:

$$\Delta y = \frac{1}{M} \quad \frac{\Delta x}{x}$$

si los x_i están en progresión aritmética

$$\Delta x = \text{Cte.}$$

y queda: $$\Delta y = \frac{c}{x}$$

siendo $$c = \frac{\Delta x}{M}$$

Luego hay una proporcionalidad inversa entre la diferencia y el valor de x. O bien:

$$x \Delta y = C$$

el producto de la variable por la diferencia es constante.

B) Empleo de la derivada.

Veremos algunos ejemplos en los cuales la función se encuentra aprovechando una relación entre la variable y la derivada.

Ejemplos: 1) Sea la siguiente tabla. Se pide encontrar la función que relaciona x e y.

x	y	y'	y'/y
1	3.0		
2	4.3	1.5	0.36
3	6.1	2.1	0.34
4	8.5	3.0	0.35
5	12.1	4.1	0.34
6	16.8	5.9	0.35
7	23.9	8.2	0.34
8	33.2		

Obtenemos la derivada y vemos que la relación $\frac{y'}{y}$ es aproximadamente constante y su promedio es 0.347,

o sea: $$\frac{y'}{y} = 0.347$$

luego integrando se obtiene:

$$\ln y = 0.347\, x + \ln C$$

de donde: $$y = C\, e^{0.347x}$$

En seguida se determina C como valor medio de los $y\, e^{-0,347x}$.

3) Encontrar la función correspondiente a la tabla de valores:

x	y	Δy	y'	yy'
0	2,00			
		0,45		
1	2,45		$0,41_5$	1,02
		0,38		
2	2,83		0,36	1,02
		0,34		
3	3,17		$0,31_5$	1,00
		0,29		
4	3,46		0,29	1,00
		0,29		
5	3,75		0,27	1,01
		0,25		
6	4,00		0,25	1,00
		0,25		
7	4,25		0,24	1,02
		0,23		
8	4,48			

Formamos la derivada y vemos que el producto y y' es constante e igual en promedio a 1,01. Luego se tiene;

$$y\ y' = 1{,}01$$

$$2\ y\ y' = 2.02$$

$$y^2 = 2.02\ x + C$$

de donde: $$y = \sqrt{2.02\ x + C}$$

es la función pedida; de $y^2 - 2{,}02\ x$ se obtendrá el valor de C, que es;

$$C = 3{,}95$$

C) Empleo de los logaritmos;

Este tipo de procedimiento tiene gran utilidad

cuando se trata de funciones exponenciales. Esta clase de funciones se reconoce fácilmente debido a la rápida variación del valor y en la tabla de valores.

Dada la tabla encontrar la función.

x	y	log y	Δ log y
1	3.0	0.477	
			0,158
2	4.3	0.635	
			0.151
3	6.1	0.786	
			0.144
4	8,5	0.930	
			0.155
5	12,1	1.085	
			0,146
6	16.8	1.231	
			0,149
7	23.9	1.380	
			0,143
8	33.2	1.523	

(Nótese que este tipo de función ya fué tratado en la pág. 101, y en la solución del problema puede emplearse cualquiera de los dos métodos).

El procedimiento consiste en buscar los logaritmos de y. Luego se calculan sus diferencias. Si la primera diferencia sale constante sabemos por (1) que:

$$\log y = a x + b$$

luego:

$$y = 10^{(ax+b)} = 10^{b} \; 10^{ax} = k\, c^{x}$$

En este caso $\Delta \log y$ puede considerarse constante y entonces el método es aplicable. Los logaritmos de y se pueden buscar con regla de cálculo ya que sólo se precisa que las diferencias sean aproximadamente constantes.

Si se verifica que las segundas diferencias son constantes se tendría:

$$\log y = a x^2 + b x + c$$

Luego:
$$y = 10^{(ax^2+bx+c)} = 10^c \quad 10^{a(x^2 + \frac{b}{a} x)}$$

$$y = k \quad c^{x(x+e)}$$

siendo k, c y e constantes.

D) Por último haremos un ejemplo en que el problema se ha resuelto aprovechando solamente la habilidad del operador.

Encontrar la función que corresponde a la tabla:

x	y	y^{-1}		
1.5	2.60	1.60	:	1=2 x - 2
2.0	1.80	0.80	:	2
2.5	1.53	0.53	:	3
3.0	1.40	0.40	:	4
3.5	1.32	0.32	:	5
4.0	1.25	0.25	:	6
4.5	1.23	0.33	:	7

Como se vé los valores de y son decrecientes y se acercan a 1. Restémosle 1 a cada valor de y. Cada uno de los valores (y -1) es $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$.... del primer valor, o sea:

$$0.80 = \frac{1}{2}\ 1.60\ ;\ 0.53 = \frac{1}{3}\ 1.60\ ;\ 0.40\ \frac{1}{4}\ 1.60$$

Luego cada valor se obtiene dividiendo 1,60 por 1, 2, 3, etc. Pero estos números se pueden representar por la expresión 2 x - 2 o sea:

$$y = 1 + \frac{1,6}{2x - 2} = 1 + \frac{0.8}{x - 1}$$

de donde;

$$y = \frac{0.2 - x}{1 - x}$$

CASOS EN QUE HAY QUE CORREGIR LA TABLA DE VALORES:

A menudo en las experiencias el operador comete una falta o un error muy grande, lo que hace que en la tabla aparezcan valores discordantes del resto de ellos. En estos casos hay que corregir la tabla antes de tratar de encontrar la función que liga a las variables. Esta corrección es sobretodo aplicable cuando el operador, durante la experiencia anota los valores algo dudosos.

Haremos un ejemplo en que hay que corregir la tabla, lo que nos dará una idea de como se tratan estos casos. Sea una tabla de valores:

(Ver tabla en la pág. siguiente).

Calculamos las diferencias. En la primera diferencia no se nota nada. Al hacer la segunda se vé que los últimos valores varían mucho y muy irregularmente.

El error parece estar en el valor de y que corresponde a x = 15. Luego en vez de poner 23,0 ponemos 23,0 + δ y determinamos δ de modo que el error se reduzca. Veamos cómo quedan las diferencias.

x	y	Δy	$\Delta^2 y$
3	-17.4		
		1.1	
5	-16.3		2.1
		3.2	
7	-13.1		2.3
		5.5	
9	- 7.6		1.9
		7.4	
11	- 0.2		2.1
		9.5	
13	9.3		4.2
		13.7	
15	23.0		0.2
		13.9	
17	36.9		3.4
		17.3	
19	54.2		

y	Δy	$\Delta^2 y$
	9.5	
		4,2 + δ
	13.7 + δ	
23,0 + δ		0,2 - 2
	13,9 - δ	3,4 + δ
	17,3	

Debemos calcular un valor de δ que haga las segundas diferencias aproximadamente iguales.

Vemos que un valor que conviene es δ = - 1,2.

O sea que en vez de 23,0 debemos poner 21,8.
Así se obtiene el cuadro de valores definitivos:
(Ver cuadro en la pág. sig).

x	y	Δy	$\Delta^2 y$
3	-17,4		
		1,1	
5	-16,3		2,1
		3,2	
7	-13,1		2,3
		5,5	
9	- 7,6		1,9
		7,4	
11	- 0,2		2,1
		9,5	
13	9,3		3,0
		12,5	
15	21,8		2,6
		15,1	
17	36,9		2,2
		17,3	
19	54,2		

Con la tabla así corregida podemos tratar de determinar la función. Se vé que la segunda diferencia es aproximadamente constante y se resuelve por los métodos corrientes.

En forma similar se procederá cuando se presenten casos parecidos y en los que haya posibilidad de error.

PROCEDIMIENTO GENERAL :

Antes de terminar el capítulo expondremos el método general que se debe seguir para determinar las funciones. Una vez dada la tabla de valores se procederá a observar los valores x_i e y_i para ver si guardan entre sí alguna relación (si están en progresión aritmética o geométrica). Para esto basta tratar de verificar la propiedad con algunos valores saltados. Si a primera vista se vé que no cumplen ninguna relación se deja este método, sino, se sigue verificando con

todos los valores y se aplica cualquiera de las fórmulas antes deducidas bajo el título de Métodos generales.

Si no resulta ninguno de éstos, procedemos a calcular las diferencias. Si alguna de ellas es constante el problema estará resuelto.

Si ninguno de estos métodos es aplicable sólo nos queda tratar de encontrar alguna relación con la derivada o tratar de encontrar de cualquier forma la relación pedida.

El estudiante captará la gran dificultad del problema, si los valores de la tabla no encajan en alguno de los métodos antes expuestos, pero debe hacerse notar que generalmente el experimentador sabe en forma aproximada el tipo de función que deberá resultarle, lo cual hace más sencillo el problema.

En cuanto a la determinación de las constantes podemos decir que si sólo se quiere un valor aproximado, se pueden obtener dándole simplemente valores a las variables y despejando de estas ecuaciones el valor de las constantes. Si éstas se quieren con más precisión es preciso remitirse al párrafo antes citado ("Determinación de Constantes").

Como final cabe decir que en todo caso la rapidez y elegancia en la resolución de los problemas dependerá en gran parte de la iniciativa y habilidad del operador.

DETERMINACION DE CONSTANTES

Cuando de la solución de un problema se conoce la forma de la ecuación, se plantea el problema de calcular las constantes de esta ecuación, que por el momento nos son desconocidas.

Trataremos de determinarlas por medio de los datos que el problema ofrece en forma de ecuaciones numéricas.

Supongamos sea m el número de constantes por determinar. Si el número de condiciones (ecuaciones) es menor que m, las constantes quedan solo parcialmente determinadas.

Cuando dispongamos justamente de m condiciones las constantes quedarán determinadas siempre que sepamos dominar las dificultades técnicas que podría ofrecer la complicada forma de las ecuaciones de condición. Pero aún cuando las condiciones son de tipo sencillo, si su número es superior a m la determinación de las constantes ofrece características dificultades que enseñaremos a vencer más adelante.

A continuación trataremos los dos últimos casos, o sea cuando hay m condiciones para m constantes y cuando hay más de m condiciones para las mismas constantes.

Sin embargo, primero pasaremos un método general de resolución de ecuaciones que será de gran utilidad para el desarrollo del capítulo.

APROXIMACIONES SUCESIVAS:

Si se tiene una ecuación:

$$y = f(y) \qquad (1)$$

y queremos encontrar un valor de y que satisfaga la ecuación, procedemos como sigue:

Buscando un valor y_o que satisfaga aproximadamente la ecuación; la introducimos en (1) y calculamos un valor y_1:

$$y_1 = f(y_o)$$

En seguida este valor y_1 lo introducimos en (1) y calculamos un valor y_2:

$$y_2 = f(y_1)$$

continuando por este método se llega a:

$$y_{n+1} = f(y_n)$$

Hacer los reemplazos anteriores equivale a tener una serie:

$$y_n = y_o + (y_1 - y_o) + (y_2 - y_1) + \ldots\ldots (y_n - y_{n-1})$$

ya que y_n se obtendrá agregándole a y_o las diferencias entre dos soluciones contiguas y obtenidas en el proceso de aproximaciones sucesivas. Para que nuestro método se justifique, esta serie debe ser divergente, para lo cual debe verificarse, aplicando el criterio de D'Alenbert:

$$\left| \frac{y_{n+1} - y_n}{y_n - y_{n-1}} \right| \leq 2q < 1$$

lo que equivale a:

$$\left| \frac{f(y_n) - f(y_{n-1})}{y_n - y_{n-1}} \right| \leq q < 1$$

o sea: $f'(y) \leq q < 1 \qquad a < y < b$

En este caso $y_n \rightarrow y$

O sea para que podamos aplicar el método es necesario que la derivada sea menor que q en el intervalo de variación de y.

Veremos un ejemplo para aclarar el empleo de este método.

Resolver la ecuación:

$$4\ e^{2,77} - c^{3,5y} = 5\ y$$

tantearemos algunas soluciones. Veamos:

$y = 0 \qquad 4 - 1 > 0$ .no sirve.

Veamos con y = 1; dá aproximadamente:

$y = 1 \qquad 60 - 35 = 25 > 5$

Con y = 2 queda aproximadamente:

$$800 - 1.100 < 10$$

Luego la solución estará comprendida entre 1 y 2 o sea: $1 < y < 2$

Debemos ver cual y de la ecuación debemos despejar para tratar de calcularlo.

Si ponemos:

$$5y = 4e^{2,7y} - e^{3,5y}$$

$$y = f(y)$$

se vé que $f'(y)$ es mucho mayor que 1 para los valores de y comprendidos entre 1 y 2.

En general conviene despejar aquella y que produce más variación. Despejamos entonces:

$$y = \frac{1}{3,5} \ln (4e^{2,7y} - 5y) = f(y)$$

$$f'(y) = \frac{1}{3,5} \quad \frac{10,8\, e^{2,7y} - 5}{4\, e^{2,7y} - 5y}$$

$$f'(y) < 1 \qquad \text{para} \quad 1 < y < 2$$

propongamos como solución

$$y_0 = 1,11$$

$$y_1 = \frac{1}{3,5} \ln (4e^3 - 5,55)$$

$$y_1 = \frac{1}{3,5} \ln (80,76 - 5,55) = \frac{2,30}{3,5} \log 75,21$$

$$y_1 = 1,23$$

y así se continúa calculando y_2 ..... etc.

Este sistema de resolución de ecuaciones puede aplicarse a la determinación de constantes.

Para ello, si se tiene m constantes, se eliminan todas menos una. Entonces la ecuación queda, siendo c la constante:

$$F(c) = 0$$

Luego se trata de escribir la ecuación como:

$$c = f(c)$$

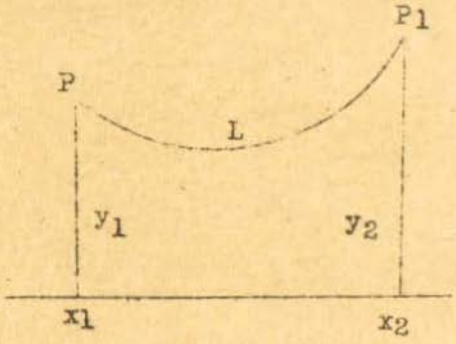
de modo que se verifique que:

$$\left| f'(c) \right| \leq q < 1 \qquad a < c < b$$

En seguida se resuelve la ecuación como se ha explicado anteriormente.

CASO EN QUE EL NUMERO DE CONDICIONES ES IGUAL AL NUMERO DE CONSTANTES:

Veremos un ejemplo para aprender a tratar casos en que las constantes estan en formas difíciles de resolver.



Se pide encontrar la forma de la cadena de largo 2,5 entre los puntos (2,4 ; 1,6) y (3,9; 2,2).

Sabemos que la ecuación de la caternaria es:

$$\frac{y - y_o}{p} = \cos h \frac{x - x_o}{p}$$

siendo las constantes x_o, y_o y p por determinar.

Impongamos las condiciones de que pase por P y P_1:

$$\frac{y_1 - y_o}{p} = \cos h \ \frac{x_1 - x_o}{p} \qquad (1)$$

$$\frac{y_2 - y_o}{p} = \cos h \ \frac{x_2 - x_o}{p} \qquad (2)$$

Sabemos que:

$$L = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \ dx$$

$$L = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \text{sen}^2 \ h \ \frac{x - x_o}{p}} \ dx = \int_{x_1}^{x_2} \cos h \ \frac{x - x_o}{p} \ dx$$

$$L = \left[p \ \text{sen h} \ \frac{x - x_o}{p} \right]_{x_1}^{x_2}$$

$$L = p \left[\text{sen h} \ \frac{x_2 - x_o}{p} - \text{sen h} \ \frac{x_1 - x_o}{p} \right] \qquad (3)$$

Hagamos:

$$\frac{x_1 - x_o}{p} = m_1 \qquad y \qquad \frac{x_2 - x_o}{p} = m_2$$

Restando (1) de (2) se tiene:

$$\frac{y_2 - y_1}{p} = \cos h \ m_2 - \cos h \ m_1$$

$$= 2 \operatorname{sen} h \frac{m_1 + m_2}{2} \operatorname{sen} h \frac{m_2 - m_1}{2} \qquad (4)$$

y (3) lo escribimos como:

$$\frac{L}{p} = 2 \cos \frac{m_1 + m_2}{2} \operatorname{sen} \frac{m_2 - m_1}{2} \qquad (5)$$

y dividiendo (4) por (5) queda:

$$\frac{y_2 - y_1}{L} = tg\, h \frac{m_1 + m_2}{2}$$

Usando una tabla de funciones hiperbólicas, obtenemos:

$$\frac{m_1 + m_2}{2} = ar\ tg\ h \frac{y_2 - ty_1}{L}$$

$$= ar\ tg\ h\ 0,24 = 0,245$$

y además:

$$\frac{1}{\cos h \frac{m_1 + m_2}{2}} = 0,97$$

Así tomando en cuenta que

$$\frac{m_2 - m_1}{2} = \frac{x_2 - x_1}{2p}$$

la relación (5) se reduce a:

$$\frac{L}{x_2 - x_1} \frac{x_2 - x_1}{2p} \quad 0,97 = \operatorname{sen} h \frac{x_2 - x_1}{2p}$$

Haciendo

$$\frac{x_2 - x_1}{2p} = u$$

$$\frac{L}{x_2 - x_1} 0,97 = 1,62 = \frac{\operatorname{sen} h\, u}{u} \qquad (6)$$

Esta ecuación es la que representa el escollo en la determinación de las constantes. La podemos escribir;

$$u = \text{ar sen h } 1,62\ u$$

Aplicamos el método de aproximaciones sucesivas.

Tanteando se vé que valores de $u < 1,5$ no satisfacen de modo alguno la ecuación.

Para $u > 1,5$

$$\frac{d}{du} \text{ ar sen h } 1,62\ u < 1$$

Hacemos: $u_{n+1} = \text{ar sen h } 1,62\ u_n$

pongamos como solución aproximada:

$$u_o = 1,5$$

Resulta:

$$u_1 = 1,62 \quad u_2 = 1,69 \quad u_3 = 1,71$$

$$u_4 = u_5 = u = 1,72$$

Con esto: $$p = \frac{1,5}{2 . 1,72} = 0,44$$

$$x_o = 3,04$$

de aquí: $$\frac{x_1 - x_o}{p} = -\frac{0,64}{0,44} = -1,45$$

$$\cos h\,(-1,45) = 2,27 = \frac{1,6 - y_o}{4,4}$$

luego: $y = -8,4$

Por lo tanto la ecuación quedaría:

$$\frac{y + 8,4}{0,44} = \cos h\,\frac{x - 3,04}{0,44}$$

Como se vé el método de las aproximaciones sucesivas permite tratar en forma general los problemas en que las incógnitas se presentan en forma difícil de calcular.

CASO EN QUE EL NUMERO DE CONDICIONES ES MAYOR QUE EL NUMERO DE CONSTANTES:

A) Ecuaciones lineales:

Una de las expresiones más sencillas y que más frecuentemente se necesita adaptar a mayor número de condiciones que constantes disponibles es la función lineal.

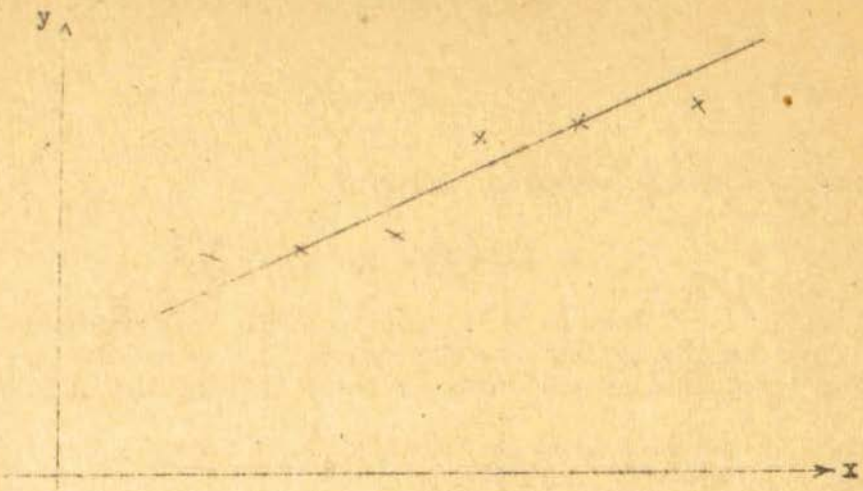
$$a + b\,x$$

Veremos en este párrafo tres métodos para calcular las constantes en estos casos.

1) Método gráfico: Supóngase que se nos dá una tabla de valores x e y, que sabemos están ligadas por una ecuación lineal.

$$y = a\,x + b$$

El método consiste en tomar ejes coordenados x e y y marcar en ellos los puntos dados por la tabla de valores.



En seguida pasamos por esos puntos una recta de modo que quede aproximadamente centrada respecto a estos o sea que a ambos lados de la recta los puntos están igualmente cercanos a ella.

En seguida, tomamos dos abscisas cualesquiera y medimos la ordenada correspondiente. Reemplazando estos valores en la ecuación se pueden encontrar a y b.

Veremos un ejemplo. Sea una tabla de valores que dá la temperatura de ebullición θ del agua en °C en función de la presión p en mm de Hg.

p	θ
518	89,8
558	91,8
598	93,5
638	95,1
678	97,0
718	98,5

Dibujemos un gráfico con los puntos, tomando como abscisas p y como ordenadas θ .

Para p tomamos como escala

1 mm de Hg = 0,05 cms.

y para θ 1 °C = 0,5 cms.

Dibujamos el gráfico de la fig. 3 y luego pasamos la recta por entre los puntos. Luego elegimos como abscisas.

$$p_1 = 500 \quad y \quad p_2 = 700$$

Se obtiene del gráfico:

$$\theta_1 = 89 \quad y \quad \theta_2 = 98,4$$

reemplazando en la ecuación:

$$\theta = a\,p + b$$

se tiene:

$$89 = 500\ a + b \qquad (1)$$

(Ver cuadro en la pág. siguiente).

$$98,4 = 700\ a + b \qquad (2)$$

y restando (2) de (1) queda:

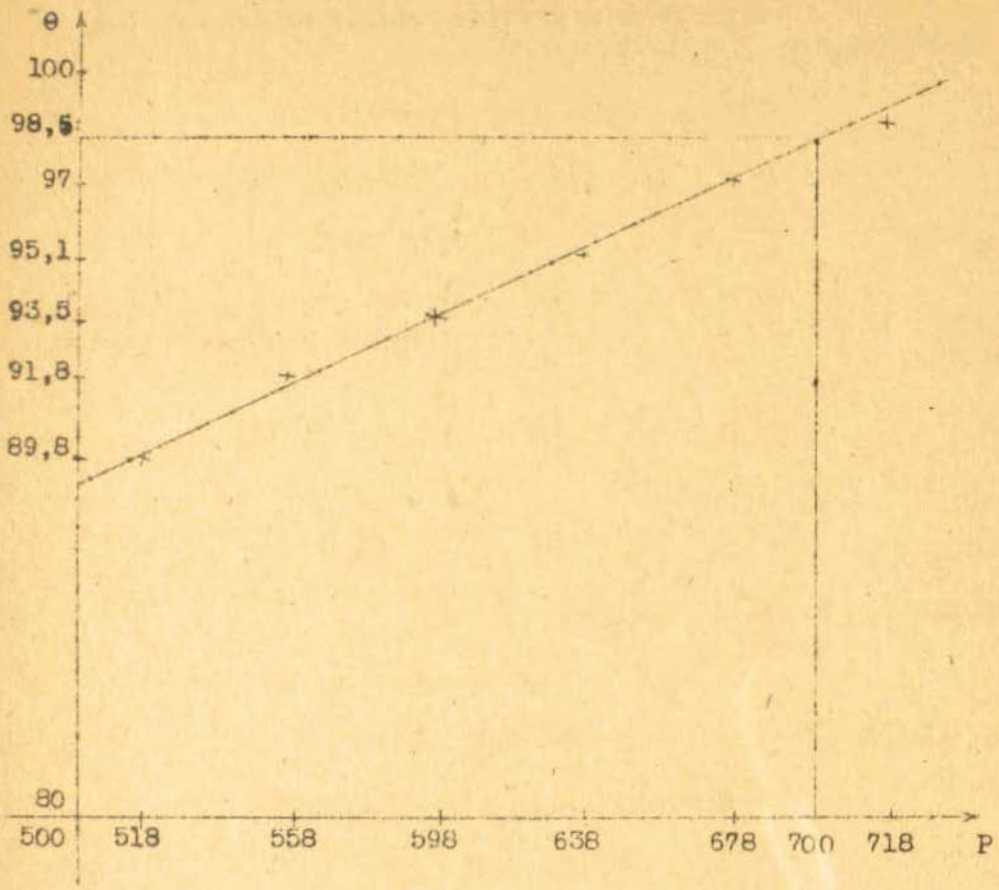
$$200\ a = 9,4$$

de donde:

$$a = 0,047$$

y reemplazando en (1):

$$b = 89 - 23,5 = 65,5$$



o sea: $\theta = 0{,}047\ p + 65{,}5$

que es la ecuación buscada.

Veremos a continuación otro método aproximado.

2() Si tenemos la tabla de valores de x e y cuya relación sabemos que es lineal, podemos ocupar un método aproxi-

-mado para encontrar las constantes de la ecuación. Sea la tabla:

x	y	$y_{calc.}$	$y_{calc} - y$
15	437	437	0
15	448	448	0
17	460	459	-1
19	469	470	+1
21	480	481	+1
23	492	492	0
25	502	503	+1

Se impone la condición de que la recta pase por dos puntos que elegimos de modo que no queden ni en los extremos ni en el centro. O sea en este caso, por ejemplo, elegimos:

$$x = 15 \quad y \quad x = 23$$

se tiene entonces:

$$\frac{y - 448}{x - 15} = \frac{44}{8} = 5,5$$

$$y = 448 + 5,5(x - 15)$$

o sea:

$$y = 5,5\,x + 362,8$$

Hacemos la diferencia entre el y de la tabla y el y calculado por la fórmula y si los errores que se producen son aceptables, hemos resuelto el problema; si no debemos resolverlo por un método más preciso, como el que sigue:

3) Métodos de los cuadrados mínimos: Supongamos que para determinar dos constantes a y b de la ecuación:

$$y = a + b \quad x$$

tengan que satisfacerse N condiciones; siendo $N > 2$

Se tiene:

$$y_n = a + b \quad x_n \qquad n = 1,2 \ldots\ldots N$$

No será, en general, posible cumplir con estas exigencias. Por lo tanto nos contentaremos con hacer las diferencias:

$$y_n - (a + b\, x_n)$$

pequeñas en valor absoluto, para lo cual pedimos que la expresión:

$$I = \sum_{1}^{N} (y_n - a - b\, x_n)^2 \qquad (1)$$

sea mínima.

Para la resolución cómoda del problema nos valdremos de métodos estudiados en el capítulo de Estadística.

Sea:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{1}^{N} x_n}{N} \qquad \bar{y} = \frac{\sum_{1}^{N} y_n}{N}$$

y hagamos $x - \bar{x} = u \qquad y - \bar{y} = v$

luego: $\bar{u} = \bar{v} = 0$

ya que:

$$\bar{u} = \frac{\sum_{1}^{N} u_n}{N} \quad y \quad \bar{v} = \frac{\sum_{1}^{N} v_n}{N}$$

Tenemos:

$$y_n - a - b\,x_n = \bar{y} + v_n - a - b(\bar{x} + u_n)$$

$$= v_n - (a + b\,\bar{x} - \bar{y}) - b\,u_n$$

$$= v_n - a' - b\,u_n$$

y reemplazando en (1) resulta:

$$I = \sum_1^N (v_n - a' - b\,u_n)^2$$

$$\frac{\partial I}{\partial a'} = 0 = -\sum_1^N v_n + N\,a' + b\sum_1^N u_n$$

pero como

$$\Sigma v_n = \Sigma u_n = 0$$

resulta

$$a' = 0$$

Ahora:

$$\frac{\partial I}{\partial b} = 0 = -\sum_1^N u_n\,v_n + b\sum_1^N u_n^2$$

luego:

$$b = \frac{\sum_1^N u_n\,v_n}{\sum_1^N u_n^2}$$

Así obtenemos como mejor aproximación

$$v = b\,u$$

o sea:

$$y = \bar{y} + \frac{\Sigma(x_n - \bar{x})(y_n - \bar{y})}{\Sigma(x_n - \bar{x})^2}(x - \bar{x})$$

El coeficiente b podrá calcularse según lo indicado en Estadística por medio de promedios provisorios x_o, y_o como sigue:

$$X = x - x_o \qquad Y = y - y_o$$

$$b = \frac{\overline{XY} - \bar{X}\bar{Y}}{\bar{X}^2 - \bar{X}^2}$$

una vez calculado b, obtenemos a de la ecuación:

$$a + b\ \bar{x} = \bar{y}$$

con lo cual queda resuelto el problema.

B) Ecuaciones no lineales.-

Ilustraremos la forma de proceder en estos casos con un ejemplo en el cual la ecuación de relación tiene forma complicada.

Sea una tabla de valores en que se nos dá el número de habitantes de Chile en millones, según datos obtenidos en los censos de los diferentes años. Designaremos el número de habitantes o población, en millones, por p y los años con la variable t.

t	p
1875	2,08
1895	2,70
1907	3,23
1920	3,73
1930	4,29

Según la fórmula logística de los habitantes de Chile, la relación que liga las variables p y t es:

$$p = \frac{A}{1 + B\ e^{-C(t-1875)}} \qquad (1)$$

en la cual A,B y C son constantes que debemos determinar.

Calculamos los valores aproximados de las constantes, reemplazando en (1) los valores correspondientes a

$$t = 1875;\ 1907 \text{ y } 1930$$

Con esto obtenemos:

$$A_o = 8{,}0 \qquad B_o = 3{,}0 \qquad C_o = 0{,}02$$

Hagamos: $A = A_o + \delta A$

$$B = B_o + \delta B$$

$$C = C_o + \delta C$$

y llamemos: $$p_n = \frac{A_o}{1 + B_o\ e^{-C_o(t-1875)}}$$

Desarrollemos

$$p = f(t, A, B, C)$$

se obtiene:

$$p = f(t, A_o, B_o, C_o) + \delta A \left.\frac{\partial f}{\partial A}\right|_o + \delta B \left.\frac{\partial f}{\partial B}\right|_o + \delta C \left.\frac{\partial f}{\partial C}\right|_o$$

$$p = p_n - \frac{p_n}{A_o}\delta A - \frac{p_n}{B_o}\left(1 - \frac{p_n}{A_o}\right)\delta B + p_n(t - 1875)\left(1 - \frac{p_n}{A_o}\right)\delta C$$

y dividiendo por p_n;

$$\frac{P}{Pn} - 1 = \frac{\delta A}{A_o} - \frac{1 - \frac{Pn}{A_o}}{B_o}\delta B + (t - 1875)\left(1 - \frac{Pn}{A_o}\right)\delta C$$

Hagamos

$$u_n = \frac{P - Pn}{Pn}$$

$$\frac{1}{A_o} = a_o \qquad \frac{A_o - Pn}{A_o \; Pn} = a_n$$

$$(t - 1875)\;\frac{(A_o - Pn)}{A_o} = r_n$$

entonces la ecuación queda:

$$u_n = a_o\,\delta A + s_n\,\delta B + r_n\,\delta C$$

Calculando p_I para cada caso obtendremos los valores de u_n, s_n y r_n y con estos estableceremos un sistema de 5 ecuaciones lineales con 3 incógnitas.

Veremos como resolver el sistema. Se tiene como ecuación general:

$$u_n = a_o\;\delta A + s_n\;\delta B + r_n\,\delta C$$

Siguiendo el método visto en el párrafo anterior, haremos mínima la expresión:

$$I - \sum_{1}^{N} (u_n - a_o\,A - s_n\,B - r_n\,C)^2$$

Hagamos: $\bar{s} = \frac{\sum_{1}^{N} s_n}{N}$ $\qquad$ $\bar{r} = \frac{\sum_{1}^{N} r_n}{N}$

$$u_n - u = z_n \qquad s_n - s = w_n \qquad v_n - r = v_n$$

Se tiene: $w = z = v = 0$

Calculemos la expresión:

$$u_n - a_o \delta A - s_n B - r_n \delta C = u + z_n - a_o \delta A - \delta B(w_n + s) - C(r - v_n)$$

$$u_n = z_n + (u - a_o \delta A - s \delta B - r \delta C) - \delta B w_n - \delta C v_n$$

Hagamos: $a' = a_o \delta A + s \delta B + r \delta C - u$

La expresión queda:

$$u_n = z_n - a' - \delta B w_n - \delta C v_n$$

o sea:

$$I = \sum_1^5 (z_n - a' - \delta B w_n - \delta C v_n)^2$$

Imponemos la condición de que sea mínima

$$\frac{\partial I}{\partial a'} = 0 = \sum_1^5 - (z_n - a' - \delta B w_n - \delta C v_n)$$

$$0 = - \sum_1^5 z_n + a' \cdot 5 + \delta B \sum_1^5 w_n + \delta C \sum_1^5 v_n$$

pero como $\sum_1^5 w_n = \sum_1^5 v_n - \sum_1^5 v_n = 0$

se tiene: $a' = 0$ (2)

$$\frac{\partial I}{\partial(\delta B)} = 0 = \sum_{I}^{5} - (z_n - \delta B\, w_n - \delta C\, v_n) w_n$$

$$0 = -\sum_{1}^{5} z_n w_n + \delta B \sum_{1}^{5} w_n^2 + \delta C \sum_{1}^{5} v_n \; w_n$$

o sea; $$\delta B \sum_{1}^{5} w_n^2 + \delta C \sum_{1}^{5} v_n w_n = \sum_{1}^{5} z_n w_n \qquad (3)$$

$$\frac{\delta I}{\partial(\delta C)} \quad 0 \quad \sum_{1}^{5} - (z_n - \delta B\, w_n - \delta C\, v_n)\, v_n$$

Luego; $$\delta B \sum_{1}^{5} w_n v_n + \delta C \sum_{1}^{5} v_n^2 = \sum_{1}^{5} z_n v_n \qquad (4)$$

Luego queda un sistema de 3 ecuaciones;

$$\delta A\, e_o + \delta B\, \bar{e} + \delta C\, \bar{r} = \bar{u}$$

$$\delta B \sum_{1}^{5} w_n^2 + \delta C \sum_{1}^{5} v_n w_n = \sum_{1}^{5} z_n w_n$$

$$\delta B \sum_{1}^{5} w_n v_n + \delta C \sum_{1}^{5} v_n^2 = \sum_{1}^{5} z_n v_n$$

Haciendo el cálculo de los valores de p_n, u_n, s_n, y r_n se obtiene;

p_n	u_n	s_n	r_n
2,00	0,040	0,500	0,000
2,65	0,019	0,446	13,380
3,10	0,042	0,408	19,584
3,60	0,036	0,367	24,750
4,00	0,075	0,167	27,500

Con estos valores hacemos el cálculo de las expresiones que aparecen en el sistema, obteniendo:

$$\bar{u} = 0,0425 \qquad \bar{s} = 0,3776 \qquad \bar{r} = 17,0428$$

$$\sum_{1}^{5} w_n^2 = 0,0650 \qquad \sum_{1}^{5} v_n^2 = 289,680 \qquad a_o = 0,125$$

$$\sum_{1}^{5} w_n v_n = 5,029 \qquad \sum_{1}^{5} z_n w_n = 0,0044 \qquad \sum_{1}^{5} z_n v_n = 17,0428$$

El sistema queda entonces:

$$\begin{aligned} 0,125\ \delta A \quad & 0,378 \delta B + 17,043\ \delta C = 0,043 \\ & 0,065 \delta B + 5,029\ \delta C = 0,004 \\ & 5,029 \delta B + 289,680\ \delta C = 0,580 \end{aligned}$$

cuyas soluciones son:

$$\delta A = 1,41 \qquad \delta B = -0,217 \qquad \delta C = -0,003$$

O sea, se tiene:

$$A = 9,41 \qquad B = 2,783 \qquad C = 0,017$$

Con lo cual la fórmula es:

$$p = \frac{9,41}{1 + 2,783\ e^{-0,017(t-1875)}}$$

quedando con esto resuelto el problema.

Calculando p para 1950 y 1960 se obtiene:

para 1950 $p = 5,295$ millones de hab.
1960 $p = 5,682$ millones de hab.

Como se vé el valor para 1950 es bastante aproximado.

SERIES NUMERICAS

En este capítulo estudiaremos algunos métodos para calcular aproximadamente el valor de la suma de una serie y el error con que esta ha sido determinada.

Evidentemente que antes de tratar de sumar la serie, debemos asegurarnos de su convergencia. Sin embargo, no pasaremos aquí los criterios habituales que se ocupan para determinar la convergencia o divergencia de una serie y que son materia del Algebra Superior, sino que trataremos algunos criterios prácticos que tienen gran aplicación en las series numéricas.

Un criterio de esta especie lo constituye el uso de series mayorantes. Este criterio se podría enunciar de la siguiente manera:

"Si una serie de términos positivos tiene una mayorante convergente, esta serie es convergente".

Una serie es mayorante de otra cuando cada uno de los términos de la primera es mayor que el correspondiente de la segunda.

Veremos algunos tipos de series que podemos usar como mayorantes. Si tenemos la serie:

$$a_1 + a_2 + a_3 \quad \cdots\cdots \qquad (1)$$

decimos que la serie:

$$\sum_{\infty}^{\infty} a \quad q^n \quad (0 < q < 1) \qquad (2)$$

es mayorante de (1), si se tiene que:

$$|a_n| < a\, q^{n-1} \qquad 0 < q < 1$$

Llamemos:

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots$$

y

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots + a_n$$

$$R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots\ldots$$

entonces:

Si sumamos la serie (2) tenemos:

$$a + a\,q + a\,q^2 + \ldots\ldots = \frac{a}{1 - q}$$

y además sabemos que:

$$a + a\,q + a\,q^2 + \ldots\ldots + a\,q^{n-1} = a\,\frac{1 - q^n}{1 - q}$$

su resto vale:

$$a\,\frac{q^n}{1 - q}$$

y entonces se debe tener:

$$|R_n| < \frac{a\,q^n}{1 - q}$$

De igual modo si tenemos nuevamente la serie (1):

$$a_1 + a_2 + a_3 \quad \ldots\ldots \qquad (1)$$

decimos que; $\sum_{I}^{\infty} a\, n^{-2}$

es mayorante de (1) si se verifica que:

$$|a_n| < a\, n^{-2}$$

y por lo tanto se debe tener que:

$$|R_n| < \frac{a}{n}$$

puesto que:

$$\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots < \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots$$

$$= \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \cdots = \frac{1}{n}$$

Si comparamos la serie (2) con la (3) vemos que la primera converge más rápidamente que la segunda, por ser el resto en el primer caso menor que una función exponencial de n que tiende hacia cero, mientras que la segunda es inferior a una potencia de n con exponente negativo. En efecto:

$$a\, \frac{q^n}{1-q} = A\, e^{-pn} \qquad p > 0$$

siendo; $p = \text{Log}\, \frac{1}{q}$ $\qquad \frac{a}{n} = a\, n^{-1}$

Suponemos que el lector sabe que una función

$$y_1 = A\, e^{px} \qquad A > 0,\ p > 0$$

crece cuando $x \longrightarrow \infty$ más rápidamente que toda

$$y_2 = B\,x^m \qquad B > 0, \quad m > 0$$

es decir que se tiene;

$$\frac{y_2}{y1} \longrightarrow 0 \qquad (x \longrightarrow \infty)$$

Por lo demás es fácil verificar esto por el cálculo siguiente. Sea n un entero mayor que m;

tenemos;

$$y_1 = A\left[1 + p\,x + \ldots\ldots + \frac{(p\,x)^n}{n!} + \ldots\ldots\right]$$

$$> \frac{A\,p^n}{n!}\,x^n$$

luego;

$$\frac{y2}{y1} < \frac{B\,x^m}{\frac{A\,p^n}{n!}\,x^n} = \frac{\frac{B\,n!}{A p^n}}{x^{n-m}} \longrightarrow 0$$

Podemos decir que (2) tiene buena convergencia y que (3) tiene más bien mala convergencia; pues, si por ejemplo, tenemos a = 1 y queremos obtener la suma de una serie con 2 cifras decimales correctas, es decir $|R_n| < \frac{1}{2.000}$ necesitamos calcular 2.000 términos de la (3); en cambio, para la misma precisión en (2), con a = 1, q = 0,8 bastará con 20 términos y cuando se tenga a = 1, q = 0,5 bastará aún con 12 términos.

Otra serie que podemos ocupar como mayorante es;

$$a \pm a\,e^{-\alpha} + a\,e^{-2\alpha} + a\,e^{-3\alpha} + a\,e^{-4\alpha} \pm \ldots\ldots$$

en este caso; $q = \pm e^{-\alpha}$

y como se debe tener $q < 1$

debe ser; $a > 0$

También podemos decir que si se tiene una serie divergente que es minorante con respecto a otra, ésta también es divergente.

Si tenemos la serie;

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots\cdots$$

que sabemos que es divergente, también lo será;

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}$$

ya que cada término de la segunda es mayor que el término correspondiente de la primera.

Ahora bien supóngase que tenemos una serie que sabemos convergente y de la cual queremos determinar su suma. Si le encontramos a esta serie una mayorante y una minorante cuyos restos conozcamos podemos calcular la suma de la serie propuesta con cierta aproximación encerrando el resto, entre los valores dados por los restos de las series mayorante y minorante.

Aclararemos esto con un ejemplo. Supóngase que queremos calcular la suma de la serie;

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\cdots\cdots=\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

Debemos buscarle una mayorante. Sea la serie;

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\cdots\cdots=1+\sum_{2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)n}$$

estudiamos el valor de su suma y su convergencia. Podemos poner la serie en la forma siguiente:

$$1+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{4.5}+\frac{1}{5.6}+\cdots\cdots=$$

$$=1+(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+\cdots\cdots$$

o sea el término general es:

$$\frac{1}{(n-1)n}-\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$$

luego las sumas parciales quedan:

$$S_n=2-\frac{1}{n}$$

y en el límite cuando

$$n\to\infty$$

$$S=2$$

o sea la serie es convergente y vale 2. Su resto es $\frac{1}{n}$.

Comparemos las series:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\left|\frac{1}{30}+\cdots\cdots\cdots=1\right. \qquad (1)$$

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\left|\frac{1}{25}+\cdots\cdots\cdots=S\right. \qquad (2)$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\left|\frac{1}{12}+\cdots\cdots\cdots=2\right. \qquad (3)$$

Como se ve (1) es minorante respecto de (2) y su resto es $\frac{1}{n+1}$. (3) es mayorante respecto a (2).

Tenemos: $$\frac{1}{n+1} < R_n < \frac{1}{n}$$

Ahora supóngase que para calcular la suma de (2) sumamos los términos hasta la raya vertical. En seguida debemos calcular el valor del resto.

Entonces:

$$S_4 = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} \ldots$$

y $$R_4 = \frac{1}{25} + \frac{1}{64} + \ldots\ldots$$

calculemos S_4:

$$\begin{array}{r} 1,000 \\ 0,250 \\ 0,111 \\ 0,062 \\ \hline 1,423 \end{array}$$

pero: $$\frac{1}{5} < R_4 < \frac{1}{4}$$

Luego el mayor valor que puede tener el resto de (2) es 0,250 y el menor 0,200; el valor máximo de la serie puede ser

$$\begin{array}{r} 1,423 \\ 0,250 \\ \hline 1,673 \end{array}$$

y el mínimo:

$$\begin{array}{r} 1,423 \\ 0,200 \\ \hline 1,623 \end{array}$$

Por lo tanto podemos poner:

$$1,623 < S < 1,673$$

Luego la suma valdría aproximadamente:

$$S \approx 1.648 \qquad S \approx 1,65$$

Si hubiéramos tomado 20 términos se tendría

$$\frac{1}{20} < R_{20} < \frac{1}{19}$$

El error del resto sería en este caso la semidiferencia entre los límites de variación del resto, o sea:

$$\varepsilon_R = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{19} - \frac{1}{20}\right] = \frac{1}{760} \approx 0,001$$

el error para R_4 sería:

$$\varepsilon_R = \frac{1}{2}\ (0,250 - 0,200) = 0,025$$

más como en el cálculo hemos cometido errores de un 2% el e error total sería:

$$0,025 + 0,02 < 0,05$$

o sea:

$$S = 1,65 \pm 0,05$$

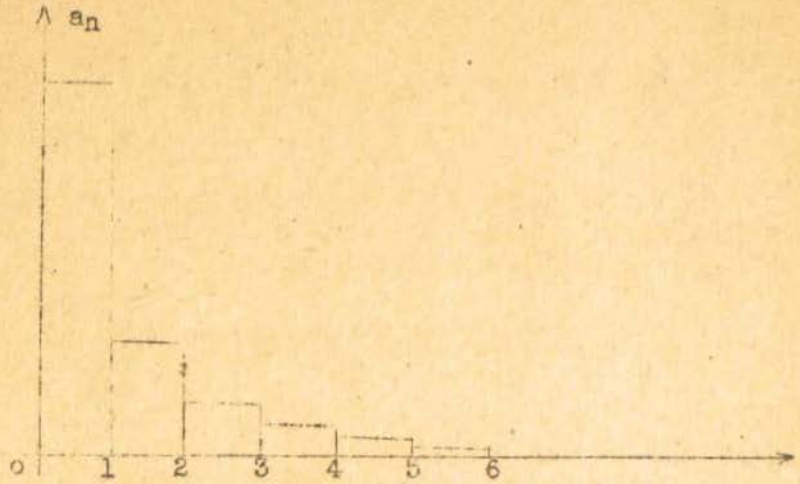
Veremos ahora un método geométrico para la apreciación del resto. Sea la serie de término general

$$a_n > 0$$

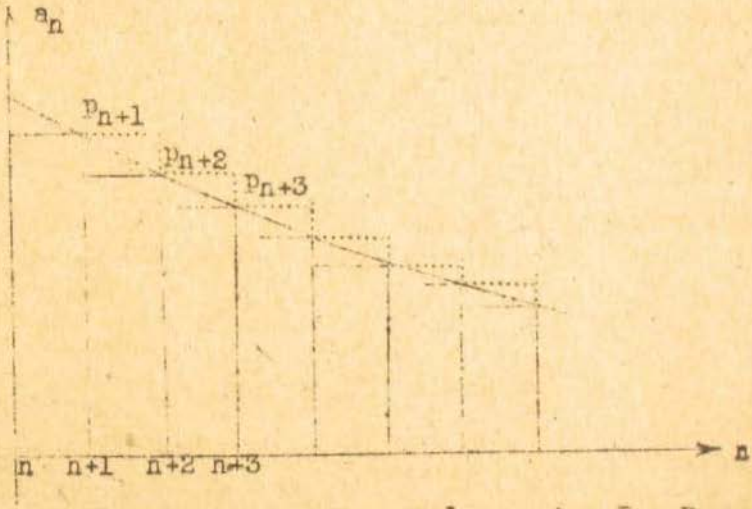
y supongamos

$$a_n > a_{n+1}$$

Representaremos gráficamente esta serie llevando n en abscisas y a_n en ordenadas. Podemos concebir cada termino de la serie como un rectángulo de base unitario y altura a_n, de modo que la suma de la serie es el área total encerrada por la poligonal.



Supongamos amplificado el gráfico en la zona del resto o sea desde el término a_{n+1} en adelante. El valor del resto está dado por la superficie de la poligonal, según la figura que sigue.



Pasemos una curva por los puntos P_n, P_{n+1}, P_{n+2}, P_{n+3}, ... de ordenadas a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}, ...respec-

tivamente. Entonces se tendría suponiendo a_x función decreciente):

$$R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \ldots < \int_n^{\infty} a_x \, dx$$

Si ahora proyectamos los puntos $P_{n\,1}$, $P_{n\,2}$,... hacia la derecha, todas las áreas se desplazan hacia la derecha en una unidad y entonces tenemos:

$$R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \ldots > \int_{n+1}^{\infty} a_x \, dx$$

Luego podemos poner:

$$\boxed{\int_{n+1}^{\infty} a_x \, dx < R_n < \int_n^{\infty} a_x \, d_x}$$

de donde aproximadamente:

$$R_n \approx \int_{n+2}^{\infty} a_x \, dx$$

El error del resto será:

$$\boxed{\varepsilon_R = \frac{1}{2}\left[\int_n^{\infty} a_x \, dx - \int_{n+1}^{\infty} a_x \, dx\right]}$$

o sea

$$\varepsilon_R = \frac{1}{2}\int_n^{n+1} a_x \, dx < \frac{1}{2}\int_n^{n+1} a_n \, dx = \frac{a_n}{2}$$

Veremos algunos ejemplos del empleo de estos métodos.

1) Se pide calcular la suma de la serie:

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}+\frac{1}{49}+\frac{1}{64}+\ldots\ldots$$

cuyo término general es:

$$a_n = \frac{1}{n^2}$$

Calculemos $S_0 = S_7$ o sea sumamos exactamente el valor de los 7 primeros términos y luego determinemos r_7.

1,000
0,250
0,111
0,062
0,040
0,028
0,020
$S_7 = 1,541$
$r_7 = 0,134$
$S = 1.675$

$$r_7 < \int_7^\infty \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{7} = 0,143$$

$$r_7 > \int_8^\infty \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{8} = 0,125$$

luego: $r_7 \approx 0,134$

$$\varepsilon_r = \frac{1}{2}\ 0,018 = 0,009 \approx 0,01$$

Por lo tanto: $S = 1,645 \pm 0,01$

Si hubiéramos calculado r_7 como:

$$r_n = \int_{n+1/2}^\infty \varepsilon_x\ dx$$

Habríamos obtenido el valor:

$$\frac{1}{7,5} = 0,133 \quad \text{en vez de } 0,134$$

2) Sumar la serie;

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{10} + \frac{1}{21} + \frac{1}{36} + \frac{1}{55} + \cdots$$

cuyo término general es:

$$s_n = \frac{1}{n(2n+1)}$$

Calculamos por ejemplo S_5 y r_5. Tenemos:

$$\begin{array}{r} 0,333 \\ 0,100 \\ 0,044 \\ 0,028 \\ 0,018 \\ \hline S_5 = \quad 0,523 \end{array}$$

$$\int_6^\infty \frac{dx}{x(2x+1)} < r_5 < \int_5^\infty \frac{dx}{x(2x+1)}$$

para apreciar r_5 necesitaríamos tablas de logaritmos, ya que los resultados de las integrales son logaritmos. Evitaremos este inconveniente procediendo del siguiente modo:

$$r_5 \int_5^\infty \frac{dx}{x(2x+1)} < \int_5^\infty \frac{dx}{2x^2} = -\left[\frac{1}{2x}\right]_5^\infty = \frac{1}{10}$$

$$> \int_6^\infty \frac{dx}{x(2x+1)} > \int_6^\infty \frac{dx}{2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2} = -\left[\frac{1}{2\left(x+\frac{1}{2}\right)}\right]_6^\infty = \frac{1}{13}$$

modificamos la función sub-integral de modo que siempre se vayan cumpliendo las desigualdades, o sea que el resto siempre sea menor o mayor que la integral definitiva y que a su vez ésta sea menor o mayor que la integral que la antecede. De este modo se pueden encontrar integrales que se puedan calcular en forma sencilla.

Luego nos queda;

$$r_5 \begin{cases} < 0,100 \\ > 0,077 \end{cases}$$

o sea;

$$r_5 \lessapprox 0,0885 \approx 0,09$$

Por lo tanto;

$$S = 0,52 + 0,09 = 0,61$$

y

$$\varepsilon_r = 0,012$$

error al que hay que agregar los 3 milésimos no escritos. Por fin;

$$S = 0,61 \pm 0,015$$

3) Resolveremos este otro caso. Sea la serie;

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots\ldots + \ldots$$

Como los métodos que hemos estudiado sólo sirven para series de términos positivos, debemos efectuar las diferencias antes de tratar de resolverla. Procediendo a restar obtenemos la nueva serie;

$$\frac{\pi}{4} = \frac{2}{3} + \frac{2}{35} + \frac{2}{99} + \ldots\ldots \frac{2}{(4n-3)(4n-1)}$$

Calcularemos, por ejemplo, S_5:

$$\begin{array}{r} 0{,}667 \\ 0{,}057 \\ 0{,}020 \\ 0{,}010 \\ 0{,}006 \\ \hline S_5 = 0{,}750 \end{array}$$

Procediendo como se explicó anteriormente calculamos r_5:

$$r_5 < \int_5^{\infty} \frac{2\,dx}{(4x-3)(4x-1)} < \int_5^{\infty} \frac{2\,dx}{(4x-3)^2} = \left[-\frac{2}{4(4x-3)} \right]_5^{\infty}$$

$$r_5 < \frac{1}{54}$$

$$r_5 > \int_6^{\infty} \frac{2\,dx}{(4x-3)(4x-1)} > \int_6^{\infty} \frac{2\,dx}{(4x-2)^2} = \frac{1}{44}$$

De modo que:

$$r_5 \begin{cases} < 0{,}023 \\ > 0{,}022 \end{cases}$$

$r_5 \quad 0{,}026 \qquad\qquad \varepsilon_r = 0{,}004$

$$\begin{array}{r} S_5 = 0{,}750 \\ r_5 = 0{,}026 \\ \hline S = 0{,}786 \end{array}$$

Luego: $S = 0{,}786 \pm 0{,}004$

y entonces;

$$\frac{\pi}{4} = 0,786 \pm 0,004$$

$$\pi = 3,144 \pm 0,02$$

Como se vé esta serie no es conveniente para el cálculo de π , ya que lo da con mucho error.

Veremos a continuación algunos problemas en que se dá una serie y se pide calcular su suma con cierta precisión o sea que se pide la condición de que el error del resto sea menor que cierta cantidad dada.

4) Sea la serie;

$$\frac{\pi^4}{96} = \frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \cdots\cdots$$

indicar cual es la suma finita que permite calcular π^4 con 6 decimales.

El factor 96 es del orden 10^2 y entonces vemos que tenemos que calcular la suma de la serie con 8 decimales exactos o sea con un error menor que $\frac{1}{2}\ 10^{-8}$.

Sabemos que;

$$\varepsilon_r < \frac{a_n}{2} = \frac{1}{2(2n-1)^4}$$

y se debe tener: $\varepsilon_r < \frac{1}{2}\ 10^{-8}$

o sea: $$\frac{1}{(2n-1)^4} < 10^{-8}$$

y por lo tanto: $$(2n - 1)^4 > 10^8$$

de donde: $$2n - 1 > 100$$

$$n > 51$$

o sea, que con 51 o 52 términos se tiene mayor precisión que la pedida.

4) Determinar la suma de la serie

$$\frac{3}{2\,.\,4}+\frac{2}{3\,.\,5}+\frac{5}{12\,.\,6}+\frac{3}{10\,.\,7}+\frac{7}{30\,.\,8}+\frac{4}{21\,.\,9}+\frac{9}{56\,.\,10}+\ldots$$

con un error menor que 0,05.

Calculamos el término de orden n que vale:

$$a_n = \frac{n+2}{n(n+1)(n+3)}$$

El problema lo resolveremos por tanteo. Tomemos primero 5 términos;

$$\begin{array}{r} 0,375 \\ 0,133 \\ 0,069 \\ 0,043 \\ 0,029 \\ \hline S_5 = 0,649 \end{array}$$

Tenemos:

$$r_5 < \int_5^{\infty} \frac{(x+2)\,dx}{x(x+1)(x+3)}$$

transformamos la cantidad sub-integral como sigue:

$$r_5 < \int_5^{\infty} \frac{(x+2)\,dx}{x(x+1)(x+3)} < \int_5^{\infty} \frac{dx}{x(x+1)} < \int_5^{\infty} \frac{dx}{x^2} = -\left[\frac{1}{x}\right]_5^{\infty} = \frac{1}{5}$$

Procediendo de igual modo;

$$r_5 > \int_6^{\infty} \frac{(x+2)\,dx}{x(x+1)(x+3)} > \int_6^{\infty} \frac{dx}{x(x+3)} > \int_6^{\infty} \frac{dx}{(x+3)^2} = -\left[\frac{1}{x+3}\right]_6^{\infty} = \frac{1}{9}$$

Por lo tanto:

$$\frac{1}{9} < r_5 < \frac{1}{5}$$

$$0{,}111 < r_5 < 0{,}200 \qquad S_5 = 0{,}649$$

$$r_5 \simeq 0{,}156 \qquad r_5 = 0{,}156$$

$$S = 0{,}805$$

$$\varepsilon_r = \frac{0{,}088}{2} = 0{,}044$$

Luego nos basta con calcular 5 términos ya que:

$$\varepsilon_r < 0{,}05$$

Si ε_r hubiera resultado mayor o menor que 0,05 habría que haber seguido tanteando hasta obtener el número de términos necesario para la precisión pedida.

Luego: $S = 0{,}805 \pm 0{,}044$

NOMOGRAFIAS O ABACOS

A menudo el ingeniero en la práctica se vé obligado a efectuar largos y demorosos cálculos numéricos, al aplicar sus fórmulas a los trabajos que necesita estudiar o proyectar. Frecuentemente es necesario ocupar una misma fórmula un gran número de veces, sólo que cambiando los datos numéricos.

Los abacos constituyen métodos gráficos que permiten calcular rápidamente los valores de una incógnita en función de los datos del problema. O sea cuando hay que resolver muchas veces una ecuación conviene hacer un grafico.

Estos abacos tienen especial utilidad en Hidráulica y en el Cálculo de Estructuras.

Tipos de abacos hay numerosísimos, pero aquí sólo trataremos los llamados abacos por puntos alineados. Dentro de este tipo trataremos dos sistemas de calcular los elementos de ellos.

ABACOS POR PUNTOS ALINEADOS:

Primer método.: Para construir un abaco de este tipo son necesarios los siguientes datos;

1) Conocer la ecuación o las ecuaciones que relacionan las variables.

2) Conocer los valores entre los cuales varían las variables.

3) Identificar el caso particular con una forma tipo de abaco.

En adelante en los desarrollos, m_x será la escala del soporte correspondiente a x,

El soporte de una variable es la recta o curva que lleva la graduación correspondiente a la variable.

La escala la elegimos en forma conveniente.

Por ejemplo,si tenemos;

$$V = \frac{M + E}{3,5}$$

o sea podemos poner:

$$f(V) = F(M) + \Phi(E)$$

siendo: $f(V) = 3,5\ V$; $F(M) = M$; $\Phi(E) = E$

Supongamos que M varía de 10 a 150 y que se quiera representar de modo que su soporte tenga entre 10 y 20 cm. de longitud. 14 cm. serán convenientes pues;

$$m_M = \frac{14}{150 - 10} = 0.1 \text{ cm.}$$

Pasaremos a estudiar como tratar algunos tipos de ecuaciones por medio de este método.

TIPO A. Sea la ecuación:

$$f(x) = F(y) + \Phi(z) \qquad (1)$$

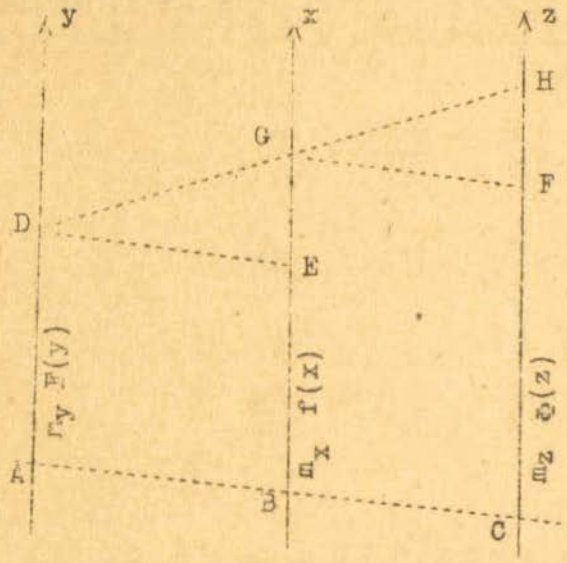
Para dibujar el abaco procederemos como sigue:

En ejes paralelos y y z construímos las magnitudes (Fig. de p.G. 154);

$$A\ D = m_y\ F(y) \qquad (2)$$

$$C\ H = m_z\ \varphi(z) \qquad (3)$$

partiendo de una recta cualquiera A C y eligiendo las escalas a conveniencia.



x, y, z son los soportes de las respectivas variables.

Luego dibujamos el eje x paralelo a y, y z de modo que se tenga:

$$\frac{A\ B}{B\ C} = \frac{m_y}{m_z}$$

Si hacemos:

$$m_x = \frac{m_y - m_z}{m_y + m_z} \qquad (4)$$

La ecuación (1) se satisface para los valores alineados x, y, z con la construcción de la escala:

$$B\,G = m_x\,(fx) \qquad (5)$$

Demostraremos esto:

Trazando D E y G F paralelos a A C, se obtienen los triángulos semejantes D E G y F G H. Se tiene por construcción:

$$\frac{D\,E}{C\,F} = \frac{A\,B}{B\,C} = \frac{m_y}{m_z}$$

y

$$\frac{E\,G}{F\,H} \qquad \frac{B\,G}{C\,H} - \frac{A\,D}{B\,G}$$

pero se tiene también:

$$\frac{E\,G}{F\,H} = \frac{D\,E}{C\,F} = \frac{m_y}{m_z}$$

luego obtenemos:

$$B\,G(m_y + m_z) = A\,D\,m_z + C\,H\,m_y$$

o bien:

$$B\,G\,\frac{m_y + m_z}{m_y\ \ m_z} = \frac{A\,D}{m_y} + \frac{C\,H}{m_z} \qquad (6)$$

sustituyendo (2), (3) y (5) en la ecuación (6) se tiene:

$$f(x) = F(y) + \Phi(z) \qquad (1)$$

con lo cual queda demostrada la propiedad.

Para la suma, las funciones dibujadas sobre y y z crecen en la misma dirección, mientras que para la diferencia;

$$f(x) = \phi(y) - \phi(z)$$

crecen en sentidos opuestos.

Dándole valores a las variables en las fórmulas (2) y (3) se van haciendo marcas regulares a lo largo de los soportes con lo cual éstos quedan convertidos en escalas funcionales. Las escalas y y z se pueden colocar en cualquiera posición sobre sus ejes pero por razones de simetría se prefiere colocarlas centradas, con respecto a un eje horizontal de simetría.

Para localizar la escala x sobre su eje o soporte, se eligen valores particulares de y y z y se traza una línea índice que determina sobre el eje x el valor correspondiente. A partir de ese punto se determina el origen copiando sobre el soporte una longitud dada por la fórmula (5) reemplazando en ella el valor de x dado por (1) para los valores particulares de y y z.

Veremos un ejemplo;

Queremos representar la ecuación;

$$S = \frac{6F}{5} + \frac{L}{4} + 0.14$$

en la cual;

F varía de 2.5 a 6.0
L " " 25 " 36

Elegimos para que los soportes tengan un largo entre 20 y 25 cm;

$$m_F = \left(\frac{5}{6}\right) 7 \text{ cm} \quad y \quad m_L = 8 \text{ cm}$$

Luego dibujamos las escalas $\frac{5}{6} \cdot 7 - \frac{6}{5}F = 7\ F$ y $S\ \frac{L}{4} = 2\ L$ en ejes paralelos.

Sabemos que:

$$\frac{A\ B}{B\ C} = \frac{m_F}{m_L} = \frac{35}{48}$$

luego elegimos:

$$A\ B = 7{,}0 \quad \text{cm}$$

$$B\ C = 9{,}6 \quad \text{cm}$$

ya que:

$$\frac{7{,}0}{9{,}6} = \frac{35}{48}$$

de donde:

$$A\ B = \frac{5 \cdot 7 \cdot 15}{6\left(8 + \frac{2}{3}\ 7\right)} = 6.33 \text{ cm}$$

(Ver fig. en la pág. siguiente).

mS vale:

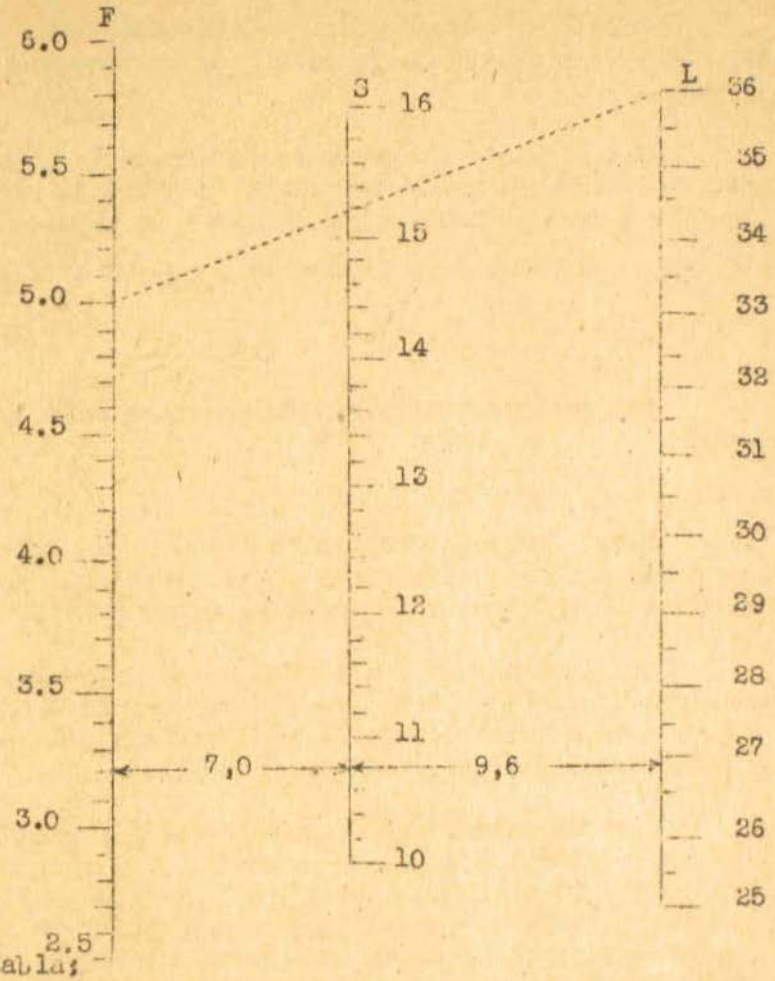
$$mS = \frac{\frac{5}{6} \cdot 7 \cdot 8}{\frac{5}{6} \cdot 7 + 8} = 3.37 \text{ cm.}$$

Para F = 5 y L = 36 se vé que S = 15.14. Luego si a partir del punto A donde la recta que une 36 y 5 corta a S copiamos la magnitud

$$3{,}37 \cdot 15, 14$$

encontramos el origen de la escala S.

Los datos del ejemplo los podemos resumir en



una tabla;

Eje	Escala	Variación	Longitud de la escala
F	$\frac{5}{6}$ (7)	2.5 a 6.0	7(6.0 - 2.5) = 24.5
L	8	25 a 36	2(36 - 25) = 22.0
S	3.37	9.39 a 16,34	3,37(16,34-9,39)=23,4

Existe un método gráfico de determinar la posición del eje y la magnitud de la escala S. Pasaremos a ver este método.

Sea el mismo abaco de la figura de la pág. 159. Supóngase que sobre el eje F se quiere determinar una longitud igual a 3 veces m_F. Como las unidades en la escala valen $\frac{6}{5}F$ para encontrar la magnitud de $3\ m_F$, debemos hacer:

$$\frac{5}{6} \cdot 3{,}0 = 2{,}5$$

De igual modo para m_L. Si queremos calcular 3 mL hacemos:

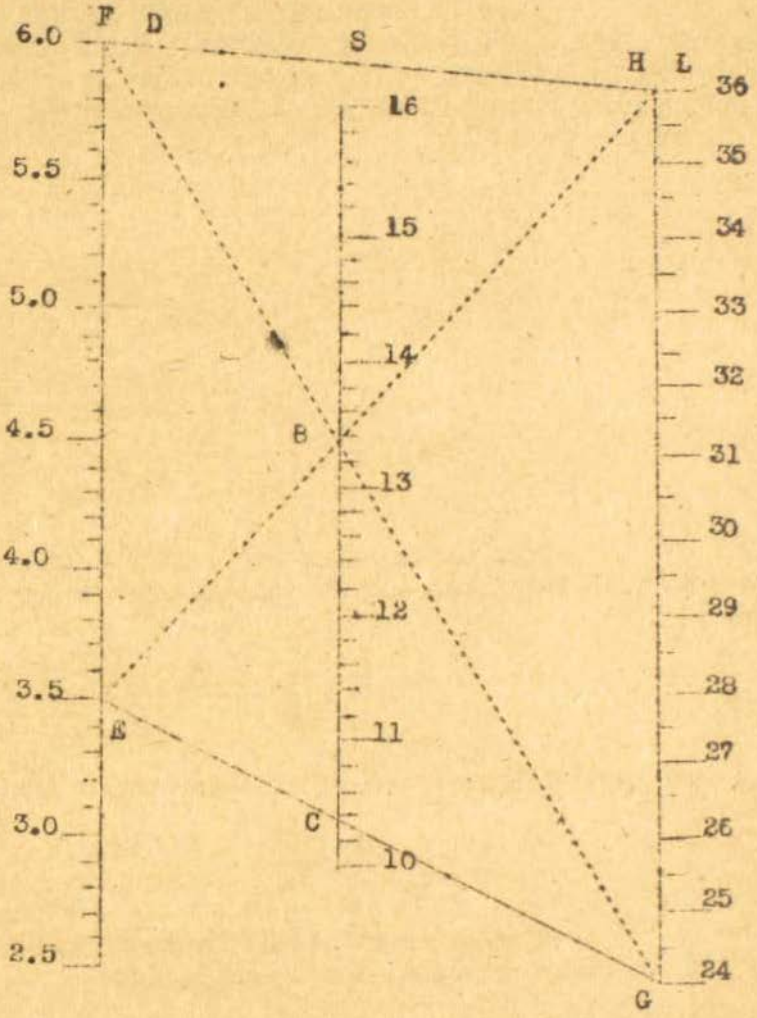
$$3 \cdot 4 = 12$$

Luego partiendo del valor F = 6,0 medimos 2,5 unidades (o sea llegamos al punto F = 3,5). Partiendo de L = 36 medimos 12 unidades y llegamos al punto L = 24.

Si luego unimos F = 6,0 con L = 36 y F = 3,5 con L = 24 se forma un trapecio D E G H. Si trazamos su diagonal vemos que se cortan sobre el eje S. la distancia B C es 3 veces la escala m_S. (Ver fig. de la pág. 161).

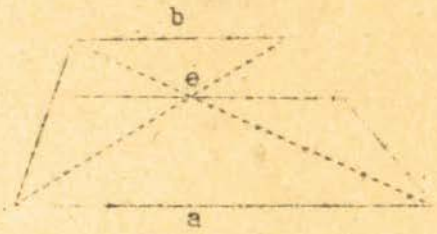
Para demostrar esto consideramos las rectas E H y D G . E H corta a S en B. Si ahora F lo aumentamos en 3 veces la escala (que vimos equivalía a 2,5 unidades) y L lo disminuimos en 3 veces su escala (que equivalía a 12 unidades), es evidente que el valor de S no cambiará y se tiene que la recta D G debe pasar por B. Luego el eje S pasa por el punto de intersección de las diagonales y es paralelo a las bases del trapecio.

De igual modo para la escla m_S. Si tenemos las rectas E H y E G, al aumentar L en una magnitud 3 veces su escala, al permanecer F constante, S crece en igual magni-


F
D
S
H
L
6.0
5.5
5.0
4.5
4.0
3.5
3.0
2.5
16
15
14
13
12
11
10
36
35
34
33
32
31
30
29
28
27
26
25
24
B
E
C
G

-tud. Este crecimiento está dado por B C. Luego basta dividir B C por 3 para encontrar m_S.

Como se comprende el hecho de haber elegido el factor 3 para las escalas es solamente accidental, ya que sólo se eligió así para tener mayor intervalo en las unidades y así obtener mayor precisión, pudiendo en otros casos elegirse cualquier factor.



Cabe hacer notar que esta construcción geométrica ha sido inspirada por la conocida propiedad del trapecio:

$$\frac{2}{e} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

y que se puede comparar con la relación entre las escalas:

$$\frac{1}{m_x} = \frac{1}{m_y} + \frac{1}{m_z}$$

Veremos ahora el tipo suma en que la ecuación contiene cuatro variables. Sea la ecuación:

$$f(x) = F(y) + \Phi(z) + \Psi(w) \qquad (6)$$

para resolver este caso hacemos:

$$\alpha = \Phi(z) + \psi(w) \qquad (7)$$

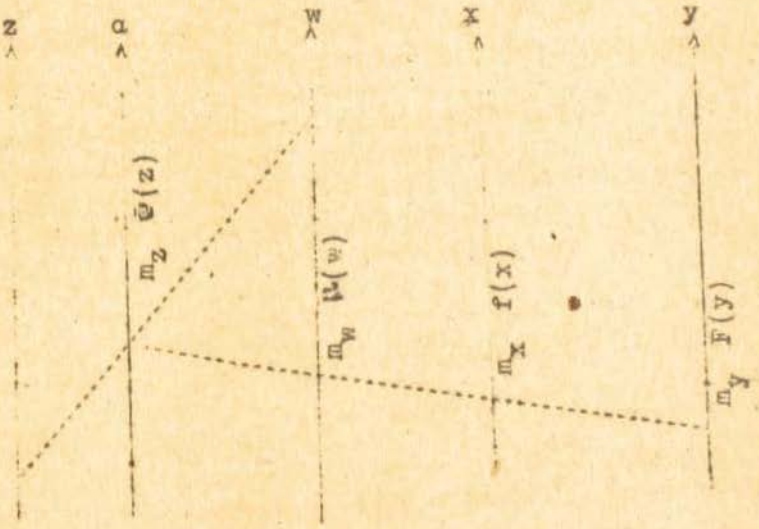
con lo cual (6) queda como:

$$f(x) = F(y) + \alpha \qquad (8)$$

De este modo cada una de las ecuaciones (7) y (8) puede resolverse del modo expuesto anteriormente.

Primero construimos el abaco correspondiente a la ecuación (7). El eje α queda entre z y w y no necesita graduación. La escala m_α vale:

$$m_\alpha = \frac{m_z\, m_w}{m_z + m_w}$$



Usando la escala α y la y se construye el abaco para la ecuación (8). El eje x queda entre el α y el $\underline{y}$ y su escala vale:

$$m_x = \frac{m_y \, m_\alpha}{m_y + m_\alpha}$$

El origen de la escala x se puede encontrar dándole valores particulares a $\underline{y}$, $\underline{z}$ y $\underline{w}$ como se explicó anteriormente.

Igualmente las distancias entre los ejes depende de las escalas. A veces es conveniente transformar la ecuación (7) de modo que se tenga:

$$\Phi(z) = \alpha - \beta(w)$$

permitiendo así que los ejes $\underline{w}$ y $\underline{z}$ aparezcan a un lado del eje. (Fig. de pag. 165).

Nótese que las funciones que llevan el mismo signo algebraico crecen en el mismo sentido.

Cuando los abacos tienen más de 3 escalas conviene poner una indicación del uso de ellos tal como se colocó en la Fig. de pág. 163. Los títulos de las escalas deben ponerse en la parte superior de la escala y deben ser breves. (Ver fig. en la pág. siguiente)

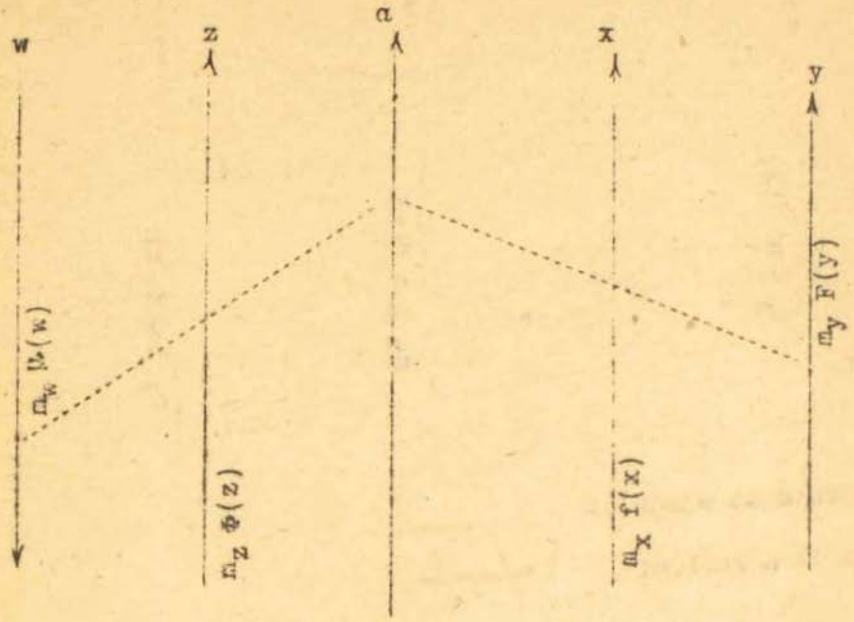
ABACOS LOGARITMICOS. Tipo B:

Ecuaciones con 3 variables.

Sea la ecuación:

$$f(x) = F(y) \cdot \Phi(z) \qquad (9)$$

La reduciremos al tipo A, tomando logaritmos:



$$\log f(x) = \log F(y) + \log \Phi(z) \qquad (10)$$

de este modo los 3 ejes paralelos llevan las escalas:

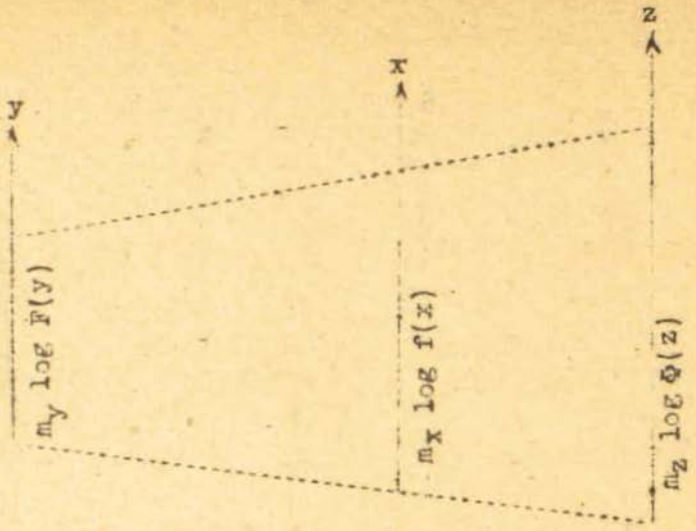
$$m_x \log f(x) \quad ; \quad m_y \log F(y) \quad ; \quad m_z \log \Phi(z)$$

Las distancias entre los ejes y el valor de m_x se determinan de igual modo que en el tipo A. En el caso del producto las escalas dibujadas sobre y y z crecen en el mismo sentido. Para el cuociente en que se tiene:

$$f(x) = \frac{F(y)}{\Phi(z)}$$

crecen en sentidos opuestos ya que:

$$\log f(x) = \log F(y) - \log \Phi(z)$$



Veremos un ejemplo:

Sea la ecuación: $L = \sqrt{\frac{W}{2.5\,C}}$

que queremos representar en un abaco, sabiendo que:

W varía de 1.000 a 5.000

C " " 1.5 a 4.5

Tomando logaritmos, la ecuación queda:

$$\log L = \frac{1}{2} \log W - \frac{1}{2} \log 2.5 - \frac{1}{2} \log C$$

elegimos las escalas:

$m_W = 50$ cms. y $m_C = 50$ cm.

luego dibujamos las escalas:

$$50(\tfrac{1}{2}\ \log\ W) = 25\ \log W$$

y

$$50(\tfrac{1}{2}\ \log\ C) = 25\ \log C$$

en ejes paralelos de modo que las funciones crezcan en distinto sentido.

Si las escalas de W y C están a una distancia de 16 cm., la escala L queda entre W y C están a una distancia de 16 cm., la escala L queda entre W y C a una distancia de 8 cm. de cada una, ya que:

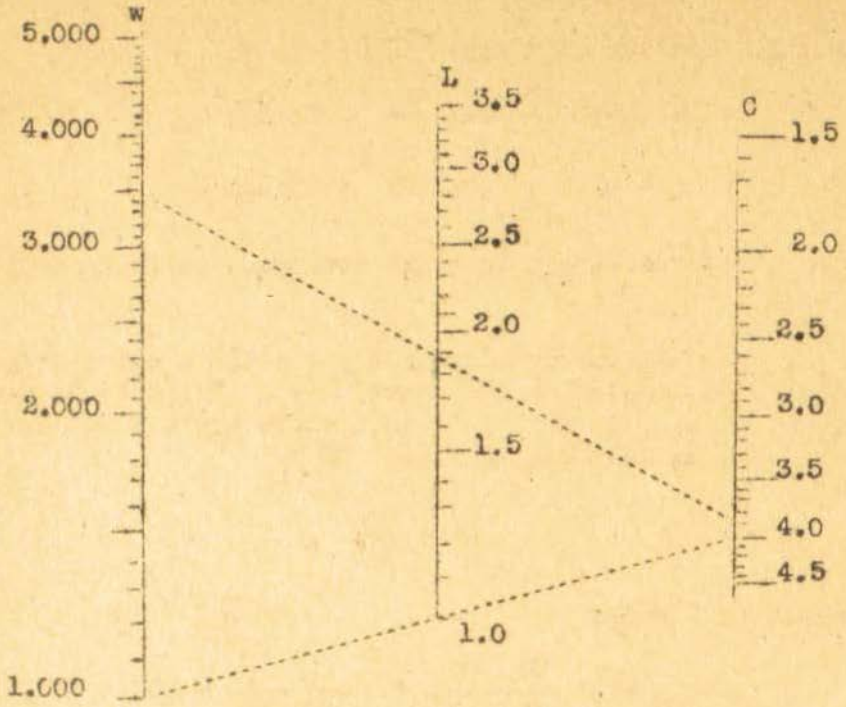
$$\frac{8}{8} = \frac{50}{50}$$

La escala de L vale:

$$m_L = \frac{m_W\ m_C}{m_W + m_C} = \frac{50\ 50}{50+50} = 25$$

La escala L crece en el mismo sentido que W ya que en la ecuación tienen igual signo. Para C = 4 y W = 1.000 se tiene L = 10. De este modo podemos determinar el origen de la escala L. El cuadro de valores del abaco es:

Eje	Escala	Variación	Long. de la escala
W	50	1.000 a 5.000	$25 \log \frac{5.000}{1.000} = 17.48$
C	50	1.5 a 4.5	$25 \log \frac{4.5}{1.5} = 11.90$
L	25	9.45 a 36	$25 \log \frac{36}{9.45} = 14.50$



Ecuaciones con 4 variables.

Sea la ecuación:

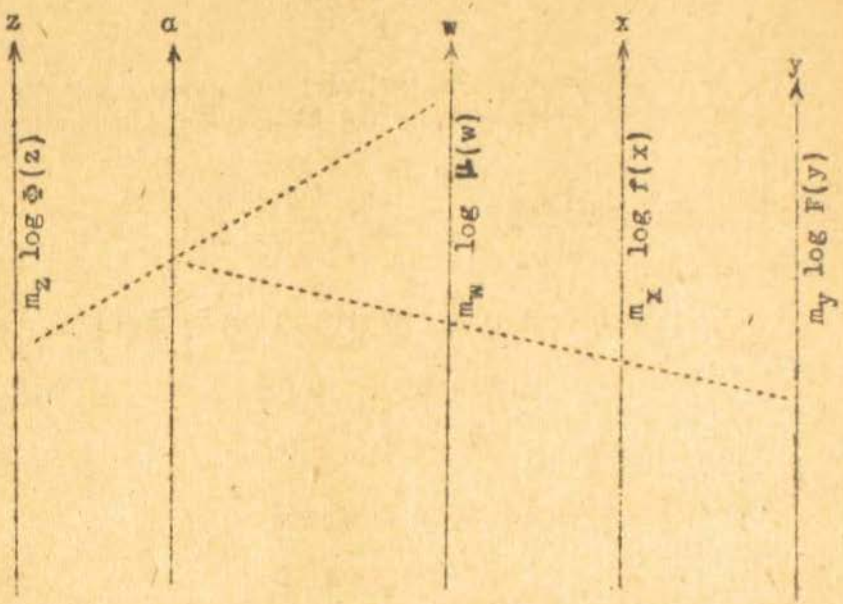
$$f(x) = F(y) \cdot \Phi(z) \cdot \Psi(w) \qquad (11)$$

hacemos; $$\alpha = \Phi(z) \cdot \Psi(w) \qquad (12)$$

y la ecuación (11) queda:

$$f(x) = F(y) \cdot \alpha \qquad (13)$$

Cada una de las ecuaciones de tres variables puede ser resuelta por los métodos del Tipo B, convirtiéndolas a forma logarítmica.



Tomando logaritmos las ecuaciones quedan:

$$\log \alpha = \log \Phi(z) + \log \mu(w) \qquad (14)$$

y

$$\log f(x) = \log F(v) + \log \alpha \qquad (15)$$

Se hace un abaco para la ecuación (12) quedando α entre $\underline{z}$ y $\underline{w}$. La escala de α está dada por:

$$m_\alpha = \frac{m_z m_w}{m_z + m_w}$$

Usando el eje α que no necesita ser graduado se hace un abaco similar para la ecuación (13), quedando el eje x entre $\underline{y}$ y $\underline{\alpha}$.

$$m_x = \frac{m_\alpha \quad m_y}{m_\alpha + m_y}$$

Las escalas se colocan centradas, por simetría. El resto se hace igual que para los abacos de las ecuaciones del tipo A.

Ecuaciones con 5 variables.

Sea la ecuación:

$$f(x) = F(y) \cdot \Phi(z) \cdot \mu(w) \cdot \delta(v) \qquad (16)$$

Hacemos:

$$\alpha = F(y) \cdot \Phi(z) \qquad (17)$$

$$\beta = \mu(w) \cdot \delta(v) \qquad (18)$$

Luego la ecuación (16) queda de la forma:

$$f(x) = \alpha \cdot \beta \qquad (19)$$

Se hacen abacos para las ecuaciones de α y β y luego se combinan para obtener x. El método como se comprende es enteramente similar al empleado para los otros casos.

Para los casos de más de 5 variables no conviene emplear este tipo de abacos (por puntos alineados) y hay, que recurrir a otros procedimientos.

Veremos un problema de aplicación de abacos algo original.

Supóngase que en cierto ramo se hacen dos interrogaciones al año. Una vez verificada la primera los alumnos solicitan que la nota de la segunda interrogación sea

multiplicada por un ciento coeficiente m, de modo que los alumnos que tengan mala nota en la primera puedan arreglar el promedio con la nota obtenida en la segunda y que los con buena nota no peligren.

Naturalmente esta medida conviene a los que tienen mala nota, ya que los que no la tienen, no tienen por qué arriesgarse a bajar la nota promedio si no obtienen en la segunda tan buen resultado como en la primera.

Como primer sistema de tratar el problema se propone el siguiente :

para notas ≥ 4 coeficiente 1

< 4 coeficiente 2

Veremos que tal resulta el sistema:

a) Sea la nota de la 1ª. interrogación 4,0 y la de la 2a. 6,0; Promediando se tiene:

$$\frac{4,0 + 6,0}{2} = 5,0$$

b) Sea la nota de la la. interrogación 3,9 y la de la 2a. 6,0:

$$\frac{3,9 + 12}{3} = 5,3$$

c) Sea la nota de la la. interrogación 4,0 y la de la 2a. 2,0. El promedio vale:

$$\frac{4,0 + 2}{2} = 3,0$$

d) Sea la nota de la la. interrogación 3,9 y la de la 2a. 2,0. Se tiene:

$$\frac{3,9 + 4,0}{2} = 2,63$$

Como se vé este sistema no sirve, ya que en el primer caso (a y b) a todos les convendría tener nota menor que 4,0 y en el segundo (c y d), también sale perjudicado el con mayor nota en la la. interrogación.

Luego debemos deducir una fórmula que nos dé el valor del promedio, con un coeficiente m variable.

Llamemos y la nota de la la. interrogación; z la nota de la 2a.; x el valor del promedio de ambos y m el coeficiente de la nota de la 2a. interrogación.

Se tendría entonces:

$$x = \frac{y + m\ z}{1 + m}$$

elegimos como valor de m;

$$m = \frac{7 - y}{2}$$

este es un buen valor para m, ya que si el alumno tiene 7,0 en la la. interrogación, es justo que la 2a. no tenga influencia (m = 0) y si tiene un 1,0 en la la., m = 3; lo que es un buen coeficiente.

Luego reemplazando en la ecuación queda:

$$x = \frac{y + (\frac{7 - y}{2})\ z}{1 + \frac{7 - y}{2}}$$

$$x = \frac{2y + 7z - y\ z}{9 - y} \qquad (1)$$

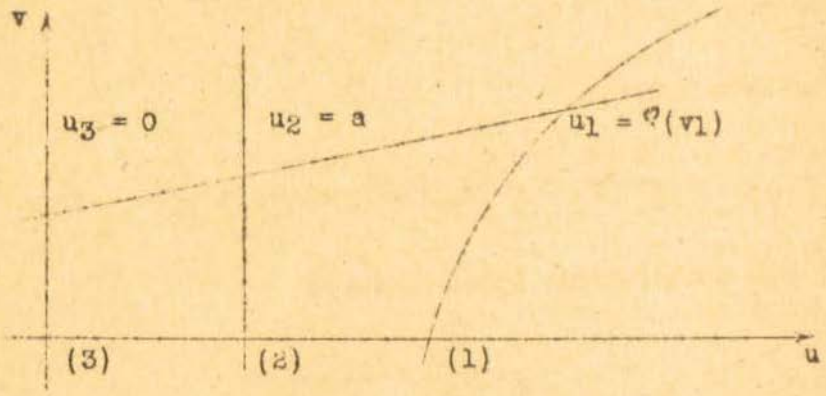
siendo la variación de x, y, z de 1 a 7.

Para resolver esta ecuación construiremos un abaco de puntos alineados.

Evidentemente que no todos los soportes de este abaco serán rectas paralelas, de modo que deberemos determinar la ecuación de uno de los soportes de modo que se verifique (1).

Supongamos ejes coordenados (u, v). Hagamos corresponder a x, (u_3, v_3); a y, (u_1, v_1), y a z, (u_2, v_2).

Uno de los soportes, el de u_3 por ejemplo, lo podemos elegir de modo que pase por el origen, el otro, u_2, situado a una distancia a de él y por último el soporte correspondiente a u_1, que es una curva que debemos determinar.



Luego la ecuación (1) queda convertida en:

$$(9 - v_1)\ v_3 = 2 v_1 + 7 v_2 - v_1\ v_2$$

Como debe verificarse que siempre los tres puntos estén en línea recta, se debe tener:

$$\begin{vmatrix} 0 & v_3 & 1 \\ a & v_2 & 1 \\ u_1 & v_1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

y desarrollando:

$$a\,v_1 - a\,v_3 + u_1\,v_3 - u_1\,v_2 = 0$$

de donde:

$$v_3 = \frac{a\,v_1 - u_1\,v_2}{a - u_1} \qquad (2)$$

pero según (1)

$$x = \frac{2\,v_1 + 7\,v_2 - v_1\,v_2}{9 - v_1} \qquad (1)$$

Luego se debe tener:

$$\frac{2\,v_1}{9 - v_1} + \left(\frac{7 - v_1}{9 - v_1}\right) v_2 = \frac{a\,v_1}{a - u_1} - \frac{u_1}{a - u_1}\,v_2$$

y como debe satisfacerse idénticamente:

$$\frac{7 - v_1}{9 - v_1} = -\frac{u_1}{a - u_1}$$

o sea:

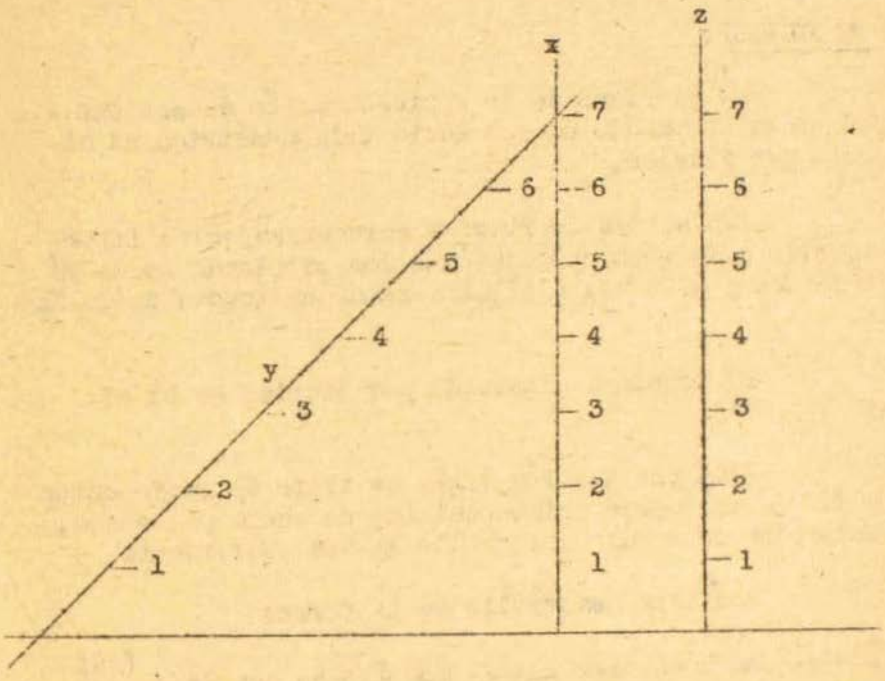
$$v_1 = 7 + 2\,\frac{u_1}{a} \qquad (3)$$

que es la ecuación de una recta inclinada de coeficiente angular $\frac{2}{a}$ (Pudo haber salido cualquiera otra curva).

Construyamos el abaco. Para eso debemos darnos un valor de a que sea conveniente. Elegimos a 2. Entonces (3) queda:

$$v_1 = u_1 + 7$$

que es una recta que corta al eje u en -7 y al eje y en 7.



Dibujando estas rectas y construyendo las escalas, queda el problema satisfactoriamente resuelto.

Bibliografía:

Para mayores detalles sobre este tema se puede consultar la obra "Empirical Equation and Nomography" de Dale S. Davis y la muy completa "Traité de Nomographie" de M. D'Ocagne. N. del R.

SEGUNDA PARTE

E S T U D I O S F U N C I O N A L E S

SERIES DE FOURIER:

El problema de la representación de una función cualquiera por medio de una serie trigonométrica ha sido resuelto por Fourier.

Las series de Fourier merecen especial importancia, debido a su gran aplicación a los problemas de la Física Matemática y a la vez a algunas ramas aplicadas de la Ingeniería.

El problema planteado por Fourier es el siguiente:

Dada una función (fx), se trata de representarla por medio de una serie trigonométrica de senos y cosenos, de los múltiplos de x cuyo desarrollo le sea equivalente.

Sea este desarrollo de la forma:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \operatorname{sen} x + a_2 \cos 2x + b_2 \operatorname{sen} 2x + \ldots \quad (1)$$

$$\ldots\ldots + a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx + \ldots\ldots$$

Para determinar los ecoficientes: a_o a_1 b_1 .. a_n b_n ... necesitamos aceptar dos condiciones previas:

a) que el desarrollo de Fourier es una serie

uniformemente convergente en el intervalo ($-\pi$, π) por lo tanto puede ser integrado término a término, dentro de dicho intervalo.

b) Que la serie representa efectivamente a la función dada.

Aceptemos esta hipótesis, aún cuando podríamos reemplazarla por otras condiciones menos restrictivas, y propongámonos llevar a cabo este estudio, definiendo nuestra función en el intervalo $(-\pi , \pi)$, considerando a la vez, que fuera de este intervalo, es periódica de período 2π, o sea verifica la ecuación:

$$f(x) = f(x + 2\pi)$$

Para calcular los coeficientes, procedemos en la forma siguiente: Multiplicando la ecuación (1) por dx e integrando entre $-\pi$ y π, tendremos:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_o}{2}\, dx$$

ya que:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \; dx = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nx \; dx = 0$$

o sea; todas las integrales del segundo miembro, excepto la primera son nulas.

Entonces:

$$a_o \pi = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx$$

de donde:

$$a = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx \qquad (2)$$

Para calcular a_n multiplicamos la ecuación(1) por cos nx dx e integramos término a término entre $-\pi$ y π. En el segundo miembro van a resultar integrales de la forma:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx$$

que van a ser todas nulas excepto aquella para la cual m = n que vale:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx \, dx = \pi$$

y además integrales del tipo

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} mx \cos nx \, dx$$

que resultan nulas sin excepción alguna.

Teniendo entonces en cuenta las ecuaciones :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx = \begin{cases} 0 & \text{para } m \neq n \\ \pi & \text{para } m = n \end{cases}$$

resulta: $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx \, dx$

de donde: $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = \pi a$

o sea: $$a = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \qquad (3)$$

Nos falta solamente calcular b_n ya que todos los demás coeficientes pueden obtenerse dando valores a n.

Para ello multiplicamos por sen nx dx e integramos entre $-\pi$ y π.

Como de costumbre serán nulas todas las integrales del segundo miembro, excepto una, en virtud de las ecuaciones:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \operatorname{sen} nx \, dx = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx \, dx = 0$$

excepto para m = n caso en el cual resulta:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^2 nx \, dx = \pi$$

Resulta entonces:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx \, dx = b_n \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^2 nx \, dx$$

de donde:

$$b = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx \, dx \qquad (4)$$

Puede notarse que la fórmula (3) dá para n = 0:

$$a_o = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx$$

lo que muestra que la expresión de an tiene valor general.

Recomendamos, no obstante, hacer separadamente el cálculo de a_o para evitar indeterminaciones que a menudo ocurren.

Dejamos al alumno la tarea de deducir las fórmulas integrales que hemos aplicado en el desarrollo de esta deducción.

Podemos resumir nuestros resultados en la fórmula:

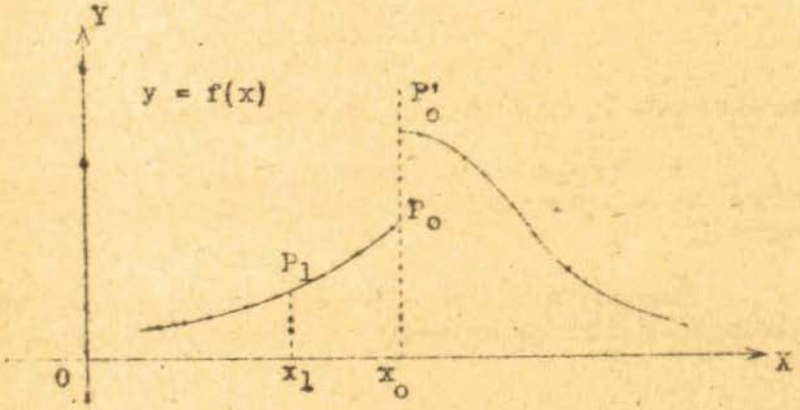
$$\left.\begin{matrix} a_n \\ b_n \end{matrix}\right\} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \left\{\begin{matrix} \cos nx \\ \operatorname{sen} nx \end{matrix}\right\} dx$$

VALOR DEL DESARROLLO PARA PUNTOS DISCONTINUOS DEL INTERVALO:

A menudo ocurre, que la función que deseamos desarrollar en serie de Fourier es discontínua para algún punto del intervalo en que se define su variable.

En tal caso, no rige nuestra deducción de las fórmulas de Euler para los coeficientes de Fourier, ya que una serie trigonométrica uniformemente convergente, es necesariamente contínua. Resulta, sin embargo, que en el caso de un número finito de discontinuidad del tipo que describiremos a continuación, subsisten nuestras fórmulas.

Sea $y = f(x)$ una función discontínua para el valor $x = x_o$ de su variable.



Supongamos que según que nos acerquemos al punto $x = x_0$ por valores superiores o inferiores, existan dos límites finitos y distintos para la función $f(x)$; es decir:

$$f(x_0 + 0) \neq f(x_0 - 0)$$

Afirmaremos, sin incurrir en una laboriosa demostración, que para puntos tales como $x = x_0$, el desarrollo de Fourier nos da el valor $f(x_0)$ que podríamos esperar, sino el valor:

$$\frac{1}{2}\left[f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)\right]$$

El lector podrá examinar lo que ocurre, a este límite para el caso de un punto contimuo del intervalo, tal como $x = x_1$.

FUNCIONES PARES E IMPARES:

A menudo hablaremos de Funciones Pares y de Funciones Impares. Se dice que una función $f(x)$ es Par, cuando verifica la ecuación:

$$f(-x) = f(x) \qquad (1)$$

Se dice que ella es Impar, cuando:

$$f(-x) = -f(x) \qquad (2)$$

Son funciones pares: 1, x^2, x^{2n}, cos x, cos hx, e^{x2}, etc.

Son impares, las funciones: x, x^3, x^{2n+1}, $\frac{1}{x}$, sen x, sen hx, tg x, Log $\frac{1+x}{1-x}$, etc.

Las funciones: e^x, Log $(1+x)$, $3+2x - 4x^2$, por ejemplo, no son ni pares ni impares.

Deduciremos algunas propiedades importantes, relativas a integración de funciones pares e impares.

Multiplicando la función $f(x)$ por $\underline{dx}$ e integrando entre $-\underline{a}$ y $\underline{a}$, se tiene:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{o} f(x)\,dx + \int_{o}^{a} f(x)\,dx \qquad (3)$$

Consideremos la primera integral y hagamos en ella el cambio de variable $x = -u$:

$$\int_{-a}^{o} f(x)\,dx = \int_{a}^{o} f(-u)\,d(-u) = \int_{o}^{a} f(-u)\,du = \int_{o}^{a} f(-x)\,dx$$

ya que una integral definida no es función de su variable de integración, sino de sus límites.

Reemplazando este valor en la ecuación (3):

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{o}^{a} f(x)\,dx + \int_{o}^{a} f(-x)\,dx \qquad (4)$$

Consideremos aquí los casos siguientes:

a) Si $f(x)$ es par, se verifica:

$$f(-x) = f(x)$$

de modo que la ecuación (4) se reduce a:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{o}^{a} f(x)\,dx$$

b) Si la función f(x) es impar;

$$f(-x) = - f(x)$$

luego la ecuación (4) nos dá:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 0$$

Resumiendo estos resultados, decimos que:

a) La integral de una función par entre -a y a, es igual al doble de la integral de la función, entre 0 y a.

b) La integral de una función impar entre - a y a, es nula.

Desarrollo de funciones pares e impares:

Aplicando las deducciones anteriores a las Series de Fourier, podemos afirmar que si la función que deseamos desarrollar es par, podremos obtener su desarrollo en serie que contenga solamente la función coseno; si ella es impar, se podrá desarrollar en serie de senos.

Demostraremos esta afirmación:

Si f(x) es una función par, también lo será la función:

$$f(x) \cdot \cos nx$$

luego: $$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx = 2 \int_{0}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx$$

de modo que:

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx$$

Del mismo modo, siendo f(x) una función par, será impar la función:

$$f(x) \text{ , sen } dx$$

y por tanto :

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \text{ sen } nx \, dx = 0$$

que trae como consecuencia $b_n = 0$

Inversamente, si f(x) es función impar, se podrá demostrar análogamente que:

$$a_n = 0$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x) \text{ sen } nx \, dx$$

Resumiendo, podemos decir, que la función f(x) podrá aceptar desarrollo de Fourier en senos o en cosenos, según que ella sea impar o par.

Haremos algunas aplicaciones de desarrollo en serie de Fourier:

Aplicaciones:

a) Desarrollar la función $f(x) = x^2$ en serie trigonométrica:

Por ser una función par, resulta:

$$b_n = 0$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} x^2 \cos nx \, dx$$

Haciendo n = 0, calculemos:

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} x^2 \, dx = \frac{2\pi^2}{3}$$

En seguida, para $n \neq 0$, pongamos:

$$a_n = \frac{2}{\pi n} \int_0^{\pi} x^2 d(\operatorname{sen} nx) = \frac{2}{\pi n} \left[x^2 \operatorname{sen} nx \right]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 2x \operatorname{sen} nx \, dx$$

El primer término es nulo, de modo que:

$$a_n = \frac{4}{n} \int_0^{\pi} x \operatorname{sen} nx \, dx$$

que escribiremos:

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \, d(\cos nx)$$

e integrando nuevamente por partes:

$$a_n = -\frac{4}{\pi n^2} \left[x \cos nx \right]_0^{\pi} - \frac{4}{\pi n^2} \int_0^{\pi} \cos nx \, dx$$

$$a_n = -\frac{4\pi}{\pi n^2} \cos n\pi - \frac{4}{\pi n^3} \left[\operatorname{sen} nx \right]_0^{\pi}$$

y como el último término es nulo, resulta:

$$a_n = \frac{4(-1)^n}{n^2}$$

Ahora bien, como el desarrollo de Fourier es:

$$x^2 = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \operatorname{sen} x + a_2 \cos 2x + b_2 \operatorname{sen} 2x + \ldots\ldots$$

se obtiene, teniendo en cuenta que todos los b_n son nulos:

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4\left[\frac{\cos x}{1^2} - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \frac{\cos 4x}{4^2} \pm \ldots \right]$$

desarrollo que es válido para

$$-\pi < x < \pi$$

Consideremos ahora algunos casos particulares:

Haciendo $x = 0$ se obtiene:

$$\frac{\pi^2}{3} - 4\left[\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} \pm \ldots\right] = 0$$

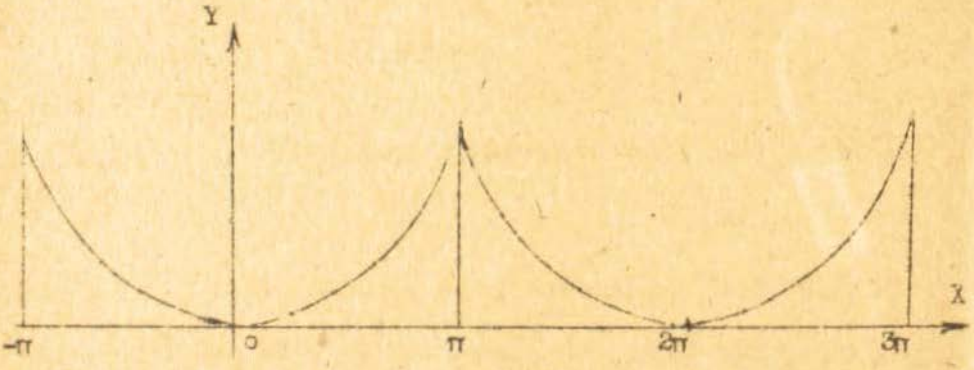
o sea:

$$\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \ldots \pm \ldots = \frac{\pi^2}{12}$$

Si referimos ahora la función a un gráfico, vemos que para $x = \pi$, resulta:

$$f(\pi - 0) = f(\pi + 0)$$

de modo que no presenta discontinuidad alguna.



Nos encontramos entonces en condiciones de hacer:

$$x = \pi$$

para obtener:

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\left[-\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \ldots\right]$$

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \ldots = \frac{\pi^2}{6}$$

Si dividimos ahora, cada término de esta serie, por 4, obtenemos:

$$\frac{1}{1^2\ 2^2} + \frac{1}{2^2\ 2^2} + \frac{1}{3^2}\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2}\frac{1}{2^2} + \ldots + \ldots = \frac{\pi^2}{24}$$

que escribiremos:

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} + \ldots + \ldots = \frac{\pi^2}{24}$$

y restando esta última de la primitiva:

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \ldots + \ldots = \frac{\pi^2}{8}$$

b) Desarrollar en serie de Fourier la función $f(x) = x$.

Como $f(x) = x$ es una función impar debemos obtener su desarrollo, en serie de senos, ya que para este caso se verifica:

$$a_n = 0$$

Ahora, calculemos b_n por medio de la fórmula:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \operatorname{sen} nx\, dx = -\frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi} x\, d(\cos nx)$$

e integrando por partes:

$$b_n = -\frac{2}{\pi n}\left[x \cos nx\right]_0^{\pi} + \frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi} \cos nx\, dx$$

$$b_n = \frac{2\pi \cos \pi n}{\pi n} + \frac{2}{\pi n^2}\left[\operatorname{sen} nx\right]_0^{\pi}$$

luego: $$b_n = -\frac{2 \cos \pi n}{n}$$

que se puede escribir: $$b_n = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}$$

Considerando ahora que $a_n = 0$ escribimos el desarrollo buscado:

$$x = 2\left[\operatorname{sen} x - \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} - \frac{\operatorname{sen} 4x}{4} + \ldots \pm \ldots\right]$$

o bien: $$\frac{x}{2} = \operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} - \frac{\operatorname{sen} 4x}{4} + \ldots \pm \ldots$$

Tomaremos en cuenta algunos casos particulares:

Haciendo $x = \frac{\pi}{2}$ se obtiene:

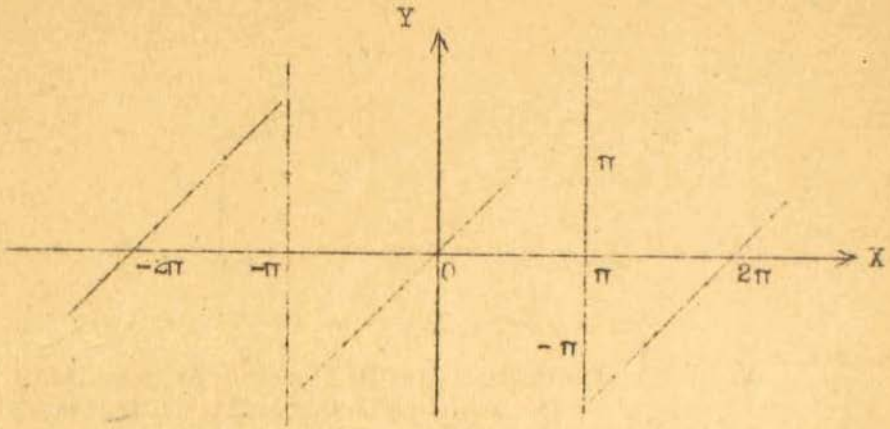
$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots \pm \ldots = \frac{\pi}{4}$$

Haciendo $x = \frac{\pi}{3}$ resulta:

$$\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{10} + \frac{1}{14} - \frac{1}{16} \pm \ldots\right]\sqrt{3} = \frac{\pi}{6}$$

o sea: $$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{10} + \frac{1}{14} - \frac{1}{16} + \ldots \pm \ldots = \frac{\pi}{6\sqrt{3}}$$

Si deseamos hacer $x = \pi$, debemos estudiar el gráfico de la función y averiguar si ella es contínua en este punto.



Es fácil ver que, al pasar la curva representativa de la función por el punto $x = \pi$ y en general, por todos los múltiplos impares de π, la ordenada experimenta un cambio brusco de $+\pi$ a $-\pi$, esto es, la función resulta discontínua en el punto considerado.

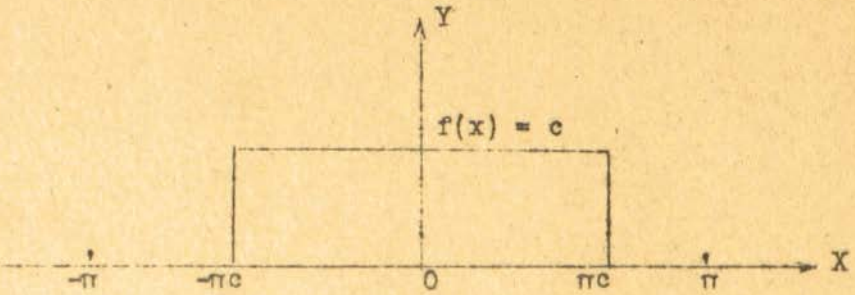
Resulta entonces, que para $x = \pi$, el desarrollo de Fourier vale:

$$\frac{1}{2}\left[f(\pi + 0) + f(\pi - 0)\right] = \frac{1}{2}\left[\pi - \pi\right] = 0$$

resultado que verificamos inmediatamente observando que

$$\operatorname{sen} n\pi = 0$$

c) Determinar el desarrollo de Fourier para la función representada en el gráfico y estudiar los resultados que se obtienen $c = \frac{1}{2}$ y $c = \frac{1}{3}$.



Si observamos que la función representada por el gráfico es par, reducimos nuestro estudio al intervalo $(0, \pi)$ aplicando las formulas;

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx$$

$$b_n = 0$$

Ahora; f(x) está definido de modo que;

$$f(x) = c \quad \text{para } 0 < x < \pi c$$

$$f(x) = 0 \quad \text{para } \pi c < x < \pi \qquad (1)$$

Para calcular entonces a_n, debemos fraccionar el intervalo de integración en la forma siguiente;

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi c} f(x) \cos nx \, dx + \frac{2}{\pi} \int_{\pi_0}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx$$

y empleando las definiciones de la función para los dos intervalos considerados en (1):

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi c} c \cos nx\, dx + \frac{2}{\pi}\int_{\pi c}^{\pi} 0 \cos nx\, dx$$

$$a_n = \frac{2c}{\pi}\int_0^{\pi c} \cos nx\, dx$$

En primer lugar, para n = 0, obtenemos:

$$a_0 = \frac{2c}{\pi}\int_0^{\pi c} dx = 2c^2$$

Para $n \neq 0$, encontramos:

$$a_n = \frac{2c}{\pi n}\left[\operatorname{sen} nx\right]_0^{\pi c} = \frac{2c \operatorname{sen} n\pi c}{n\pi}$$

El desarrollo buscado resulta:

$$f(x) = c^2 + \frac{2c}{\pi}\left[\operatorname{sen}\pi c \cos x + \frac{\operatorname{sen} 2\pi c}{2}\cos 2x + \right.$$

$$\left. + \frac{\operatorname{sen} 3\pi c}{3}\cos 3x + \frac{\operatorname{sen} 4\pi c}{4}\cos 4x + \frac{\operatorname{sen} 5\pi c}{5}\cos 5x + \ldots + \right]$$

Consideraremos a continuación algunos casos particulares:

A) Hagamos $c = \frac{1}{2}$.

Entonces:

$$f(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{\pi}\left[\cos x - \frac{\cos 3x}{3} + \frac{\cos 5x}{5} - \ldots + \ldots\right]$$

Considerando que para $x = 0$

$$f(x) = c = \frac{1}{2}$$

encontramos:

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{\pi}\left[1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots \pm \ldots\right]$$

y reduciendo:

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots \pm \ldots = \frac{\pi}{4}$$

resultado bastante conocido.

B) Haciendo en seguida $c = \frac{1}{3}$;

Obtenemos;

$$f(x) = \frac{1}{9} - \frac{\sqrt{3}}{3\pi}\left[\cos x + \frac{\cos 2x}{2} - \frac{\cos 4x}{4} - \frac{\cos 5x}{5} + \ldots \pm \ldots\right]$$

Teniendo en cuenta que para: $x = 0$

$$f(x) = c = \frac{1}{3}$$

deducimos:

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{9} - \frac{\sqrt{3}}{3\pi}\left[1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \ldots \pm \ldots\right]$$

y reduciendo;

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{10} + \frac{1}{14} + \frac{1}{16} - \ldots \pm = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

Observamos ahora que para $x = \pi c = \frac{\pi}{3}$ la función es discontínua, de modo que según lo visto anteriormente,

el desarrollo de Fourier dá en este caso el valor:

$$\frac{1}{2}\left[f(\pi c - 0) + f(\pi c + 0)\right] = \frac{1}{2}(c + 0) = \frac{1}{6}$$

Según esto:

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{9} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3\pi}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{10} + \cdots \pm \cdots\right]$$

y reduciendo:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{10} + \frac{1}{14} - \frac{1}{16} + \cdots \pm \cdots \frac{\pi}{6\sqrt{3}}$$

que verifica nuestra solución ya que obtuvimos este resultado en el problema anterior.

d) Desarrollaremos, por último, la función cos px en Serie de Fourier:

Por tratarse de una función par:

$$b_n = 0$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos px \cos nx \, dx$$

Ahora bien:

$$\cos px \cos nx = \frac{1}{2}\left[\cos(p+n)x + \cos(p-n)x\right]$$

luego: $a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(p+n)x \, dx + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(p-n)x \, dx$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left|\frac{\operatorname{sen}(p+n)x}{p+n}\right|_0^{\pi} + \frac{1}{\pi}\left|\frac{\operatorname{sen}(p-n)x}{p-n}\right|_0^{\pi}$$

$$a_n = \frac{\operatorname{sen} p\pi \cos n\pi}{\pi(p+n)} + \frac{\operatorname{sen} p\pi \cos n\pi}{\pi(p-n)}$$

y reduciendo, se llega finalmente a:

$$a_n = \frac{2p(-1)^n \operatorname{sen}\pi p}{\pi(p^2 - n^2)}$$

Haciendo $n = 0$ se encuentra:

$$a_0 = \frac{2 \operatorname{sen}\pi p}{\pi p}$$

Entonces: (2)

$$\cos px = \frac{\operatorname{sen}\pi p}{\pi}\left[\frac{1}{p} - \frac{2p}{p^2 - 1^2}\cos x + \frac{2p}{p^2 - 2^2}\cos 2x + \ldots \pm \ldots\right]$$

Para considerar algunos casos particulares, escribamos este desarrollo en la forma: (3)

$$\cos px = \frac{\operatorname{sen}\pi p}{\pi}\left[\frac{1}{p} - \left(\frac{1}{p-1} + \frac{1}{p+1}\right)\cos x + \left(\frac{1}{p-2} + \frac{1}{p+2}\right)\cos 2x + \ldots\right]$$

Haciendo $x = 0$ resulta:

$$1 = \frac{\operatorname{sen}\pi p}{\pi}\left[\frac{1}{p} - \left(\frac{1}{p-1} + \frac{1}{p+1}\right) + \left(\frac{1}{p-2} + \frac{1}{p+2}\right) + \ldots\right]$$

o sea:

$$\frac{\pi}{\operatorname{sen}\pi p} = \ldots + \frac{1}{p+2} - \frac{1}{p+1} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p-1} + \frac{1}{p-2} - \ldots \pm \ldots$$

y por último:

$$\frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi p} = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{p-n} \qquad (4)$$

entendiendo $\sum_{-\infty}^{\infty}$ en el sentido de $\lim_{N \to \infty} \sum_{-N}^{N}$

Haciendo en seguida $x = \pi$ se encuentra:

$$\cos \pi p = \frac{\operatorname{sen} \pi p}{\pi} \left[\frac{1}{p} + \left(\frac{1}{p-1} + \frac{1}{p+1} \right) + \left(\frac{1}{p-2} - \frac{1}{p+2} \right) + \ldots \right]$$

o sea:

$$\pi \cot \pi p = \ldots \frac{1}{p+2} + \frac{1}{p+1} + \frac{1}{p} + \frac{1}{p-1} + \frac{1}{p-2} + \ldots$$

que escribimos por fin:

$$\pi \cot \pi p = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{p-n} \qquad (5)$$

Hagamos por último: $p = \frac{1}{2}$. Entonces la fórmula (2) dá:

$$\cos \frac{x}{2} = \frac{1}{\pi} \left[2 - \frac{4}{1 \cdot 4} \cos x + \frac{4}{1 \cdot 16} \cos 2x - \frac{4}{1 \cdot 36} \cos 3x \pm \ldots \right]$$

y después de reducir, queda finalmente:

$$\cos \frac{x}{2} = \frac{4}{\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos x}{1 \cdot 3} - \frac{\cos 2x}{3 \cdot 5} + \frac{\cos 3x}{5 \cdot 7} - \frac{\cos 4x}{7 \cdot 9} + \ldots \right)$$

REPRESENTACION DE UNA POLIGONAL EN SERIE DE FOURIER:

Consideremos el caso de una poligonal que presenta simetría central en torno de un punto O.

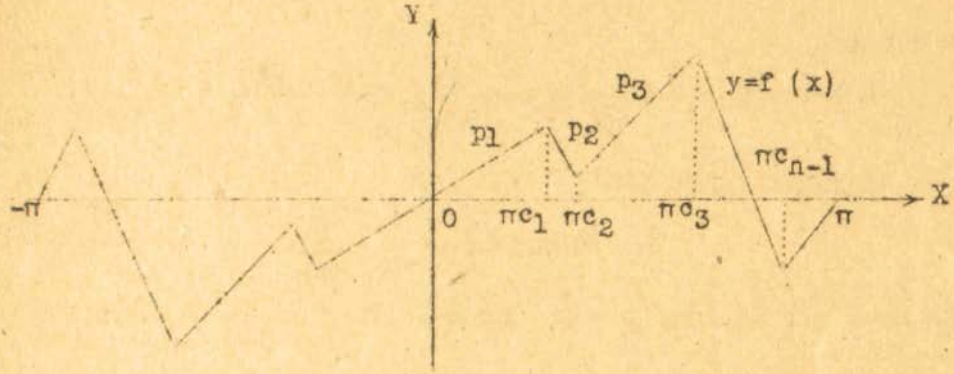
Supongamos además que ella pasa por los

puntos (0,0) y (+π, 0) de modo que, si y = f(x) es la ecuación de la poligonal, referida a un sistema de coordenadas de origen 0, se verifica:

$$f(\pi) = 0$$

$$f(0) = 0$$

$$f(-\pi) = 0 \qquad (1)$$



Como puede notarse en el gráfico, la función representada en él, es una función impar, a causa de la simetría central de que hemos hablado.

Es evidente entonces que:

$$a_n = 0$$

y

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \quad \text{sen } nx \quad dx$$

que escribiremos:

$$b_n = -\frac{2}{\pi\, n} \int_0^{\pi} f(x)\, d(\cos nx)$$

e integrando por partes:

$$b_n = -\frac{2}{\pi n}\left[f(x)\cos nx\right]_0^{\pi} + \frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi} f'(x)\cos nx\,dx$$

Como el primer término es nulo en virtud de (1), nos queda sólo el segundo que escribimos:

$$b_n = \frac{2}{\pi n}\left[\int_0^{\pi c_1} f'(x)\cos nx\,dx + \int_{\pi c_1}^{\pi c_2} f'(x)\cos nx\,dx + \right.$$

$$\left. + \int_{\pi c_2}^{\pi c_3} f'(x)\cos nx\,dx + \ldots + \ldots + \int_{\pi c_{m-1}}^{\pi} f'(x)\cos nx\,dx\right]$$

y por tratarse de una poligonal vemos que el valor de $f'(x)$ se conserva constante dentro de cada uno de los intervalos en que hemos subdividido el intervalo fundamental $(0, \pi)$.

Designando por $p_1\ p_2 \ldots p_m$ las pendientes de los lados de la poligonal, podemos llevar a cabo las integrales de la ecuación anterior, ya que según hemos visto, dichas pendientes son valores constantes.

Obtenemos así:

$$b_n = \frac{2}{\pi n}\left[p_1\int_0^{\pi c_1}\cos nx\,dx + p_2\int_{\pi c_1}^{\pi c_2}\cos nx\,dx + p_3\int_{\pi c_2}^{\pi c_3}\cos nx\,dx + \right.$$

$$\left. + \ldots\ldots + p_m\int_{\pi c_{m-1}}^{\pi}\cos nx\,dx\right]$$

de donde:

$$b_n = \frac{2}{\pi n^2} \quad (p_1 \operatorname{sen} n\pi c_1 + p_2 \operatorname{sen} n\pi c_2 - p_2 \operatorname{sen} n\pi c_1 +$$

$$+ p_3 \operatorname{sen} n\pi c_3 - p_3 \operatorname{sen} n\pi c_2 + \ldots + p_m \operatorname{sen} n\pi - p_m \operatorname{sen} n\pi c_{m-1})$$

o sea:

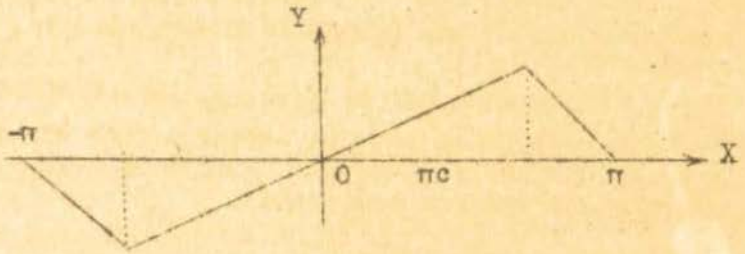
$$b_n = \frac{2}{\pi n^2} \left[(p_1 - p_2) \operatorname{sen} n\pi c_1 + (p_2 - p_3) \operatorname{sen} n\pi c_2 + \right.$$

$$\left. + \ldots + (p_{m-1} - p_m) \operatorname{sen} n\pi c_{m-1} \right]$$

Esta fórmula dá los coeficientes del desarrollo buscado, para el caso que tratamos, que es general.

Estudiaremos solamente algunos casos particulares;

Sea, la poligonal que se encuentra poniendo m = 2 cuyo gráfico es:



y que corresponde a la vibración de una cuerda fija en los extremos (0, π).

Haciendo m = 2 se encuentra:

$$b_n = \frac{2(p_1 - p_2) \operatorname{sen} n\pi c}{\pi n^2}$$

y dando valores a n:

$$b_1 = \frac{2(p_1 - p_2)\ \text{sen}\ 2\pi c}{\pi 1^2}$$

$$b_2 = \frac{2(p_1 - p_2)\ \text{sen}\ 2\pi c}{\pi 2^2}$$

$$b_3 = \frac{2(p_1 - p_2)\ \text{sen}\ 3\pi c}{\pi 3^2}$$

. . . . . .

de modo que la función resulta:

$$f(x) = \frac{2(p_1 - p_2)}{\pi}\left[\frac{\text{sen}\,\pi c}{1^2}\ \text{sen}\ x + \frac{\text{sen}\ 2\pi c}{2^2}\ \text{sen}\ 2x + \right.$$

$$\left. + \frac{\text{sen}\ 3\pi c}{3^2}\ \text{sen}\ 3x + \ldots\right]$$

Dando distintos valores a c; podemos encontrar, aún, algunos sub-casos:

Escribamos, por ejemplo, los desarrollos correspondienes a $c = \frac{1}{2}$ y $c = \frac{1}{3}$

Para $c = \frac{1}{2}$ se obtiene:

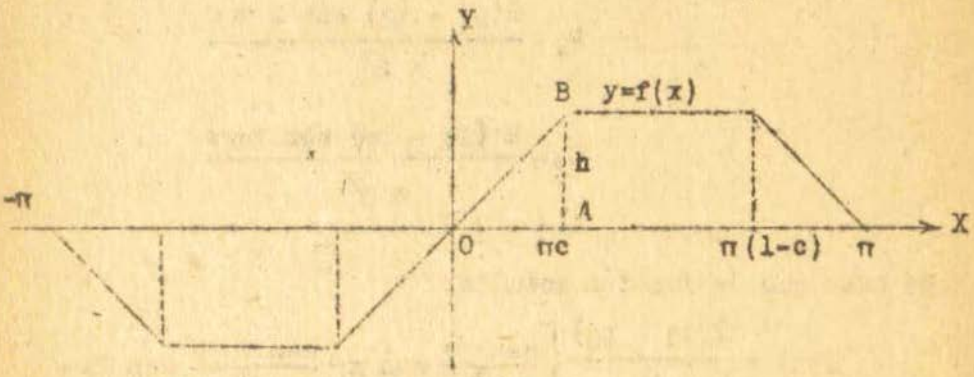
$$f(x) = \frac{2(p_1 - p_2)}{\pi}\left[\text{sen}\ x - \frac{\text{sen}\ 3x}{3^2} + \frac{\text{sen}\ 5x}{5^2} + \ldots \pm \ldots\right]$$

Haciendo, por último, $c = \frac{1}{3}$, obtenemos;

$$f(x)=\frac{\sqrt{3}(p_1 - p_2)}{\pi}\left[\operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen} 2x}{2^2} - \frac{\operatorname{sen} 4x}{4^2} - \frac{\operatorname{sen} 5x}{5^2}\right]$$

APLICACION;

Determinar la función representada por el gráfico, en forma de serie trigonométrica y calcular



$\overline{O\,A}$ y $\overline{A\,B}$ de modo que si b_n es el coeficiente de rango n del desarrollo, se tenga;

$$b_1 = 1;\ b_3 = 0$$

Haciendo m = 3;

$$p_1 = -p_3 = \frac{h}{\pi c} \quad y \quad p_2 = 0$$

en la fórmula general deducida para la poligonal, encontramos por resultado;

$$b_n = \frac{2}{\pi n^2} \cdot \frac{h}{\pi c} \operatorname{sen} n\pi c + \operatorname{sen}(n\pi - n\pi c)$$

$$b_n = \frac{2h}{\pi^2 n^2 c} \operatorname{sen} n\pi c \,(1 - \cos n\pi)$$

Esta ecuación, muestra que:

$$b_n = \begin{cases} 0 & \text{para n par} \\ \dfrac{4h}{\pi^2 c n^2} \operatorname{sen} n\pi c & \text{para n impar} \end{cases}$$

de modo que, dando a n los valores n = 1, 3, 5,... etc., obtenemos:

$$b_1 = \frac{4h \operatorname{sen} \pi c}{c\pi^2}$$

$$b_3 = \frac{4h \operatorname{sen} 3\pi c}{9 c \pi^2}$$

$$b_5 = \frac{4h \operatorname{sen} 5\pi c}{5 c \pi^2}$$

$$b_7 = \frac{4h \operatorname{sen} 7\pi c}{49 c \pi^2}$$

. . . . . .

Determinemos en seguida c y h de modo que:

$$b_1 = 1 \quad y \quad b_3 = 0$$

Tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{4h}{c\pi^2} \operatorname{sen} \pi c = 1 \\ \dfrac{4h}{9 c \pi^2} \operatorname{sen} 3\pi c = 0 \end{array} \right.$$

De la última se saca;

$$\operatorname{sen} 3\pi c = 0$$

cuya solución más sencilla y aceptable es;

$$3\pi c = \pi$$

o sea;

$$c = \frac{1}{3}$$

Entonces la primera dá;

$$h = \frac{\pi^2}{6\sqrt{3}}$$

Teniendo en cuenta estos valores, resulta;

$$b_5 = -\frac{1}{25}$$

$$b_7 = \frac{1}{49}$$

de modo que;

$$f(x) = \operatorname{sen} x - \frac{1}{25}\operatorname{sen} 5x + \frac{1}{49}\operatorname{sen} 7x \ldots.$$

es el desarrollo buscado.

EXTENSION DEL INTERVALO DEL DESARROLLO DE FOURIER;

Hemos considerado, hasta ahora, el desarrollo de Fourier, restringido sólo al intervalo $(-\pi, \pi)$. Nos proponemos en este párrafo, ampliar este desarrollo a un intervalo cualquiera $(a - c, a + c)$, es decir encontrar la forma del desarrollo de una función cualquiera $f(x)$, en dicho intervalo.

Sea entonces la función $f(x)$, definida de modo que la variable x pueda tomar todos los valores comprendidos en el intervalo $(a-c, a+c)$.

Definiremos una variable u, que relacionaremos con x, por medio de la ecuación:

$$u = \frac{\pi(x - a)}{c} \qquad (1)$$

de modo que:

para $x = a - c$ resulta $u = -\pi$

y para $x = a + c$ se obtiene $u = \pi$

Deducimos entonces, que, mientras x varía continuamente en el intervalo $(a - c, a + c)$, u lo hace del mismo modo en el intervalo $(-\pi, \pi)$.

Podemos, por tanto, aplicar la teoría del desarrollo de Fourier, a la función:

$$f(a + \frac{u\ c}{\pi})$$

por estar su variable u, definida en el intervalo $(-\pi, \pi)$.

Obtendremos así:

$$f(a + \frac{u\ c}{\pi}) = \frac{A_o}{2} + A_1 \cos u + B_1 \operatorname{sen} u + A_2 \cos 2u + \ldots$$

$$+ B_2 \operatorname{sen} 2u + \ldots + A_n \cos nu + B_n \operatorname{sen} nu \ldots \qquad (2)$$

en que los coeficientes quedan definidos por las fórmulas:

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(a + \frac{u\ c}{\pi}) \cos nu\ du$$

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(a + \frac{u\ c}{\pi}) \operatorname{sen} nu\ du \qquad (3)$$

Escribamos el desarrollo (2), expresando u en función de x por medio de la fórmula (1):

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + A_1 \cos\frac{(x-a)\pi}{c} + B_1 \operatorname{sen} \frac{(x-a)\pi}{c} + A_2 \cos\frac{(x-a)2\pi}{c} +$$

$$+ B_2 \operatorname{sen} \frac{(x-a)2\pi}{c} + \ldots + A_n \cos \frac{(x-a)n\pi}{c} + B_n \operatorname{sen} \frac{(x-a)n\pi}{c} + \ldots$$

y desarrollando y agrupando convenientemente:

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \left[A_1 \cos \frac{\pi a}{c} + B_1 \operatorname{sen} \frac{\pi a}{c}\right] \cos \frac{\pi x}{c} +$$

$$+ \left[A_1 \operatorname{sen} \frac{\pi a}{c} + B_1 \cos \frac{\pi a}{c}\right] \operatorname{sen} \frac{\pi x}{c} + \left[A_2 \cos \frac{2\pi a}{c} - B_2 \operatorname{sen} \frac{2\pi a}{c}\right] \cos \frac{2\pi x}{c} + \left[A_2 \operatorname{sen} \frac{2\pi a}{c} + B_1 \cos \frac{2\pi a}{c}\right] \operatorname{sen} \frac{2\pi x}{c} + \ldots + \left[A_n \cos \frac{n\pi a}{c} - B_n \operatorname{sen} \frac{n\pi a}{c}\right] \cos \frac{n\pi x}{c} + \left[A_n \operatorname{sen} \frac{n\pi a}{c} + B_n \cos \frac{n\pi a}{c}\right] \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{c} + \ldots$$

Consideremos aparte el coeficiente de $\cos \frac{n\pi x}{c}$ y reemplacemos en él los valores de A_n y B_n dados por las fórmulas (3):

Obtenemos:

$$A_n \cos \frac{n\pi a}{c} - B_n \operatorname{sen} \frac{n\pi a}{c} \int_{-\pi}^{\pi} f(a + \frac{uc}{\pi}) \left[\cos \frac{n\pi a}{c} \cos nu - \operatorname{sen} \frac{n\pi a}{c} \operatorname{sen} nu\right] du$$

o sea;

$$A_n \cos \frac{n\pi a}{c} - B_n \operatorname{sen} \frac{n\pi a}{c} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(a + \frac{u\,c}{\pi}) \cos(u + \frac{n\pi a}{c})\, du$$

y pasando a la variable x;

$$A_n \cos \frac{n\pi a}{c} - B_n \operatorname{sen} \frac{n\pi a}{c} = \frac{1}{c} \int_{a-c}^{a+c} f(x) \cos \frac{n\pi x}{c}\, dx$$

Efectuando un cálculo análogo, que el alumno podrá verificar, encontramos para el coeficiente de:

$$\operatorname{sen} \frac{n\pi x}{c} ;$$

$$A_n \operatorname{sen} \frac{n\pi a}{c} + B_n \cos \frac{n\pi a}{c} = \frac{1}{c} \int_{a-c}^{a+c} f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{c}\, dx$$

Podemos decir entonces que el desarrollo de Fourier para la función f(x), extendido al intervalo (a-c, a+c) toma la forma:

$$f(x) = \frac{a_0}{c} + a_1 \cos \frac{\pi x}{c} + b_1 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{c} + a_2 \cos \frac{2\pi x}{c} + \tag{4}$$

$$+ b_2 \operatorname{sen} \frac{2\pi x}{c} + \ldots + a_n \cos \frac{n\pi x}{c} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{c} + \ldots$$

en que: $$a_n = \frac{1}{c} \int_{a-c}^{a+c} f(x) \cos \frac{n\pi x}{c}\, dx$$

$$b_n = \frac{1}{c} \int_{a-c}^{a+c} f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{c}\, dx \tag{5}$$

Las fórmulas (4) y (5) resuelven como se vé el problema propuesto.

APLICACION:

Desarrollar la función $f(x) = x$ en serie de Fourier en el intervalo $(-4, 4)$.

Por ser $f(x) = x$ una función impar, su desarrollo no contendrá a la función coseno, de modo que:

$$a_n = 0$$

y $$b_n = \frac{2}{4} \int_0^4 x \operatorname{sen} \frac{n \pi x}{4} \, dx$$

ya que en este caso: $a = 0$ y $c = 4$.

Entonces:

$$b_n = - \frac{2}{n\pi} \int_0^4 x \, d\left(\cos \frac{n \pi x}{4}\right)$$

e integrando por partes:

$$b_n = - \frac{2}{n\pi} \left[x \cos \frac{n\pi x}{4} \right]_0^4 + \frac{2}{n\pi} \int_0^4 \cos \frac{n\pi x}{4} \, dx$$

o sea:

$$b_n = - \frac{8}{n\pi} \cos n\pi + \frac{8}{n^2\pi^2} \left[\operatorname{sen} \frac{n \pi x}{4} \right]_0^4$$

y como el segundo término es nulo, resulta:

$$b_n = \frac{8}{n\pi} (-1)^{n+1}$$

De esta manera el desarrollo resulta:

$$x = \frac{8}{\pi} \left[\operatorname{sen} \frac{\pi x}{4} - \frac{1}{2} \operatorname{sen} \frac{2\pi x}{4} + \frac{1}{3} \operatorname{sen} \frac{3\pi x}{4} - \frac{1}{4} \operatorname{sen} \frac{4\pi x}{4} + \cdots \pm \cdots \right]$$

$$\frac{\pi x}{8} = \operatorname{sen} \frac{\pi x}{4} - \frac{1}{2} \operatorname{sen} \frac{2\pi x}{4} + \frac{1}{3} \operatorname{sen} \frac{3\pi x}{4} - \frac{1}{4} \operatorname{sen} \frac{4\pi x}{4} + \ldots \pm \ldots$$

DESARROLLO FINITO DE FOURIER:

Ante el problema general de desarrollar en serie una función conocida, el Matemático y el Ingeniero plantean sus puntos de vista de un modo algo diferente.

El matemático considera todos los términos de su desarrollo, es decir, imagina a éste, formado por infinitos términos, de modo que si sus sumas parciales tienden a un límite finito, dicho límite sea la función desarrollada. El ingeniero, entretanto, limita su desarrollo, a un cierto número de términos, de modo que el error cometido al despreciar el resto, sea despreciable, en comparación con el orden de magnitud de las cifras con que él trabaje.

Sea entonces una función f(x) que queremos desarrollar en serie trigonométrica.

Sea entonces, por un lado:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \operatorname{sen} x + a_2 \cos 2x + b_2 \operatorname{sen} 2x + \ldots$$

$$\ldots + a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx + \ldots$$

la solución del problema, dada por Fourier.

Supongamos, por otra parte, la existencia de un polinomio:

$$P_m(x)=\frac{A_o}{2} + A_1\cos x + B_1 \operatorname{sen} x + A_2 \cos 2x + B_2 \operatorname{sen} 2x + \ldots$$

$$\ldots \qquad (1)$$

$$\ldots + A_n \cos nx + B_n \operatorname{sen} nx\, nx + \ldots + A_m \cos mx + B_m \operatorname{sen} mx$$

que guarde la misma estructura del desarrollo de Fourier, para la función $f(x)$, y que tenga $2m+1$ términos, es decir, un número limitado de ellos.

Designaremos en adelante por A_n y B_n los coeficientes de una pareja cualquiera de términos del polinomio, en que n tomará todos los valores enteros comprendidos entre 0 y m.

Nuestro problema es ahora el siguiente; Si adoptamos el polinomio $P_m(x)$ como desarrollo de la función $f(x)$, pretendemos determinar los coeficientes A_n y B_n, de modo que el error cometido en la aproximación sea el mínimo posible.

Sea entonces:

$$\delta_m(x) = f(x) - P_m(x) \qquad (2)$$

Esta función constituye el error de que hablamos, y para que el sea mínimo, exigiremos, en virtud del principio de los Cuadrados Mínimos, que la función:

$$I_m = \int_{-\pi}^{\pi} \delta_m^2 (x)\, dx \qquad (3)$$

Tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{4h}{c\ \pi^2} \operatorname{sen} \pi c = 1 \\ \dfrac{4h}{9\ c\pi^2} \operatorname{sen} 3\pi c = 0 \end{array}\right.$$

De la última se saca:

$$\operatorname{sen} 3\pi c = 0$$

cuya solución más sencilla y aceptable es:

$$3\pi c = \pi$$

o sea:

$$c = \frac{1}{3}$$

Entonces la primera dá:

$$h = \frac{\pi^2}{6\sqrt{3}}$$

Teniendo en cuenta estos valores, resulta:

$$b_5 = -\frac{1}{25}$$

$$b_7 = \frac{1}{49}$$

de modo que:

$$f(x) = \operatorname{sen} x - \frac{1}{25} \operatorname{sen} 5x + \frac{1}{49} \operatorname{sen} 7x \ldots.$$

es el desarrollo buscado.

EXTENSION DEL INTERVALO DEL DESARROLLO DE FOURIER:

Hemos considerado, hasta ahora, el desarrollo de Fourier, restringido sólo al intervalo $(-\pi, \pi)$. Nos proponemos en este

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx \, dx$$

Como integrantes entre 0 y π , tomaremos en cuenta la segunda de las ecuaciones que definen nuestra función, es decir:

$$f(x) = x(\pi - x)$$

Tendremos: $$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x(\pi - x) \operatorname{sen} nx\, dx$$

que escribiremos:

$$b_n = \frac{2}{\pi n} \int_0^{\pi} x(\pi - x)\, d(\cos nx)$$

e integrando por partes:

$$b_n = -\frac{2}{\pi n}\left[x(\pi - x)\cos nx\right]_0^{\pi} + \frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi} (\pi - 2x)\cos nx\, dx$$

El primer término se anula; el restante lo escribimos:

$$b_n = \frac{2}{\pi n^2}\int_0^{\pi} (\pi - 2x)\, d(\operatorname{sen} nx)$$

e integrando nuevamente por partes:

$$b_n = \frac{2}{\pi n^2}\left[(\pi - 2x)\operatorname{sen} nx\right]_0^{\pi} + \frac{2}{\pi n^2}\int_0^{\pi} 2 \operatorname{sen} nx\, dx$$

Como nuevamente resulta nulo el primer término, se obtiene:

$$b_n = -\frac{4}{\pi n^3}\left[\cos nx\right]_0^{\pi}$$

y finalmente:

$$b_n = \frac{4}{\pi n^3}\left[1 + (-1)^{n+1}\right]$$

sea mínima.

Esta nueva función depende de los coeficientes del polinomio $P_m(x)$ y del número m.

Para un número n determinado, ella dependerá sólo de dichos coeficientes, de modo que la condición necesaria para que I_m sea mínimo será:

$$\frac{\partial I_m}{\partial A_n} = \frac{\partial I_m}{\partial B_n} = 0$$

Calculemos $\frac{\partial I_m}{\partial A_n}$, derivando la ecuación (3) respecto a A_n:

$$\frac{\partial I_m}{\partial A_n} = \int_{-\pi}^{\pi} 2\delta_m(x) \frac{\partial \delta_m(x)}{\partial A_n} dx$$

Derivando luego la ecuación (2) con respecto a A_n :

$$\frac{\partial \delta_m(x)}{A_n} = - \frac{\partial P_m(x)}{\partial A_n}$$

ya que $f(x)$ es independiente de A_n.

Derivando por último la ecuación (1) con respecto a A_n:

$$\frac{\partial P_m(x)}{\partial A_n} = \cos nx$$

luego: $$\frac{\partial \delta_m(x)}{\partial A_n} = - \cos nx$$

de modo que: $$\frac{\partial I_m}{\partial A_n} = - 2\int_{-\pi}^{\pi} \delta_m(x) \cos nx \, dx$$

Reemplazando ahora $\delta_m(x)$ en esta ecuación:

$$\frac{\partial I_m}{\partial A_n} = -2 \int \left[f(x) - \frac{A_o}{2} - A_1 \cos x - \ldots - A_n \cos nx - \ldots - B_m \operatorname{sen} mx \right] \cos nx \, dx$$

Efectuando las integrales e igualando el resultado a cero, para establecer la condición de mínimo para Im:

$$\int f(x) \cos nx \, dx - A_n \int \cos^2 nx \, dx = 0$$

ya que todas las otras integrales son nulas.

De aquí resulta:

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int f(x) \cos nx \, dx \qquad (4)$$

fórmula que el lector verificará para n = 0.

De igual modo debemos obtener:

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int f(x) \operatorname{sen} nx \, dx \qquad (5)$$

Estas fórmulas muestran que los coeficientes del polinomio $P_m(x)$ son idénticos a los del desarrollo de la función f(x) en serie de Fourier.

Según lo que acabamos de demostrar, se puede escribir el polinomio $P_m(x)$, reemplazando los coeficientes A_n, B_n por los coeficientes de Fourier a_n, b_n, debido a su equivalencia, es decir:

$$P_m(x) = \frac{a_o}{2} + a_1 \cos x + b_1 \operatorname{sen} x + \ldots + a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx + \ldots + a_m \cos mx + b_m \operatorname{sen} mx$$

Ahora como: $$\delta_m(x) = f(x) - P_m(x)$$

se tiene:

$$f(x) = \frac{a_o}{2} + a_1 \cos x + b_1 \operatorname{sen} x + \ldots + a_n \cos nx +$$

$$+ b_n \operatorname{sen} nx + \ldots + a_m \cos mx + b_m \operatorname{sen} mx + \delta_m(x)$$

Esta ecuación nos muestra que podemos limitar el desarrollo de Fourier, para una función $f(x)$, conservando el número de términos que deseemos, obteniendo una aproximación máxima, en lo relativo a la elección de los coeficientes y que sólo depende del número de términos que dejemos en el polinomio.

Se puede apreciar, que tanto el matemático, como el ingeniero, encuentran en los coeficientes de Fourier la solución de sus problemas respectivos, que según se vió estaban basados en puntos de vista diferentes.

AVALUACION DEL ERROR:

Calculemos la integral:

$$I_m = \int_{-\pi}^{\pi} \delta_m^2(x)\, dx$$

Observando que:

$$\delta_m(x) = \frac{a_o}{2} + a_1 \cos x + b_1 \operatorname{sen} x + \ldots + a_m \cos mx +$$

$$+ b_m \operatorname{sen} mx - f(x)$$

se tiene:

$$I_m = \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{a_o}{2} + a_1 \cos x + b_1 \operatorname{sen} x + \ldots + a_m \cos mx + \right.$$

$$\left. + b_m \operatorname{sen} mx - f(x) \right]^2 dx$$

Desarrollando este cuadrado y separando las integrales:

$$I_m = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_o^2}{4}\, dx + \int_{-\pi}^{\pi} a_1^2 \cos^2 x\, dx + \int_{-\pi}^{\pi} b_1^2 \operatorname{sen}^2 x\, dx + \ldots$$

$$\ldots + \int_{-\pi}^{\pi} a_m^2 \cos^2 mx\, dx + \int_{-\pi}^{\pi} b_m^2 \operatorname{sen}^2 mx\, dx + \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx -$$

$$- a_o \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx - 2 a_1 \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos x\, dx - 2 b_1 \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} x\, dx - 2 a_m \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx\, dx - 2 b_m \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} mx\, dx$$

ya que el resto de las integrales se anula por las razones que hemos visto en ocasiones anteriores.

Ahora, hemos demostrado que:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \pi a_o$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx\, dx = \pi a_m$$

y

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} mx\, dx = \pi b_m$$

y teniendo en cuenta que:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mx\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^2 mx\, dx = \pi$$

se obtiene:

$$I_m = \pi \frac{a_o^2}{2} + \pi a_1^2 + \pi b_1^2 + \ldots + \pi a_m^2 + \pi b_m^2 + \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx -$$

$$-\pi a_o^2 - 2\pi a_1^2 - 2\pi b_1^2 - \dots - 2\pi a_m^2 - 2\pi b_m^2$$

y reduciendo y factorizando π :

$$I_m = \int f^2(x)dx - \pi\left[\frac{a_o^2}{2} + a_1^2 + b_1^2 + \dots + a_m^2 + b_m^2\right]$$

Esta fórmula nos permite calcular I_m conociendo únicamente la función $f(x)$, ya que los coeficientes de Fourier, son funciones de ella.

Llamemos en seguida ε_m al valor numérico del error medio producido al limitar el desarrollo de Fourier a un número finito de términos.

Se tendrá:

$$\varepsilon_m^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \delta^2 m(x)\, dx$$

y como hemos llamado I_m a esta integral, encontramos que:

$$I_m = 2\pi\varepsilon_m^2$$

de donde resulta:

$$\varepsilon_m = \sqrt{\frac{I_m}{2\pi}}$$

que es la fórmula que buscamos.

APLICACION:

Consideremos una función impar de segundo grado, en cada uno de los intervalos $(-\pi, 0)$ y $(0, \pi)$, que se haga nula para los puntos:

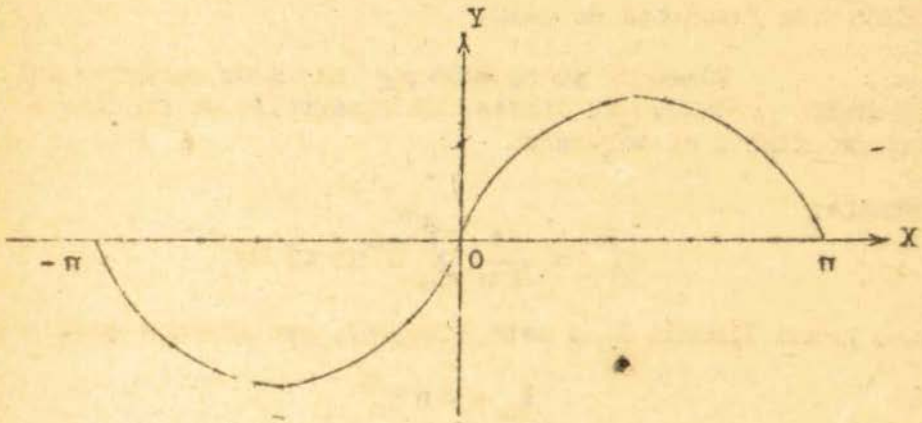
$$x = 0 \quad y \quad x = \pi$$

La definiremos en la forma siguiente:

$$f(x) = x(\pi + x) \quad \text{para} \quad -\pi < x < 0$$

$$f(x) = x(\pi - x) \quad \text{para} \quad 0 < x < \pi$$

Su gráfico será el siguiente:



Entonces:

$$a_n = 0$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx \, dx$$

Como integrantes entre 0 y π, tomaremos en cuenta la segunda de las ecuaciones que definen nuestra función, es decir:

$$f(x) = x(\pi - x)$$

Tendremos:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x(\pi - x) \operatorname{sen} nx \, dx$$

que escribiremos:

$$b_n = -\frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi} x(\pi - x)\, d(\cos nx)$$

e integrando por partes:

$$b_n = -\frac{2}{\pi n}\left[x(\pi - x)\cos nx\right]_0^{\pi} + \frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi}(\pi - 2x)\cos nx\, dx$$

El primer término se anula; el restante lo escribimos:

$$b_n = \frac{2}{\pi n^2}\int_0^{\pi}(\pi - 2x)\, d(\operatorname{sen} nx)$$

e integrando nuevamente por partes:

$$b_n = \frac{2}{\pi n^2}\left[(\pi - 2x)\operatorname{sen} nx\right]_0^{\pi} + \frac{2}{\pi n^2}\int_0^{\pi} 2 \operatorname{sen} nx\, dx$$

Como nuevamente resulta nulo el primer término, se obtiene:

$$b_n = -\frac{4}{\pi n^3}\left[\cos nx\right]_0^{\pi}$$

y finalmente:

$$b_n = \frac{4}{\pi n^3}\left[1 + (-1)^{n+1}\right]$$

Dando valores a n. encontramos que:

$$b_1 = \frac{8}{\pi} \qquad b_3 = \frac{8}{27\pi}$$

$$b_2 = 0 \qquad b_4 = 0$$

Calculemos ahora: $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx$

Por ser $f^2(x)$ una función par, resulta:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx = 2\int_{0}^{\pi} f^2(x)\,dx = 2\int_{0}^{\pi} x^2(\pi - x)^2\,dx = \frac{\pi^5}{15}$$

Aplicaremos ahora la fórmula:

$$I_m \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx = \pi\left[\frac{a_0^2}{2} + a_1^2 + b_1^2 + \ldots + a_m^2 + b_m^2\right]$$

para $m = 1$, y teniendo en cuenta que $a_n = 0$ y por lo tanto $a_0 = 0$. Se obtiene:

$$I_1 = \frac{\pi^5}{15} - \frac{\pi^4}{\pi^2}$$

y como:

$$\varepsilon_1 = \sqrt{\frac{I_1}{2\pi}}$$

se encuentra:

$$\varepsilon = 0{,}07$$

Estudiemos ahora la aproximación que se obtiene: para $m = 2$.

Aplicando la fórmula que dá I_m para $m = 2$:

$$I_2 = \frac{\pi^5}{15} - \pi\left[\frac{64}{\pi^2} + \frac{64}{27\pi^2}\right]$$

Calculando esta expresión y teniendo en cuenta que:

$$\varepsilon_2 = \sqrt{\frac{I_2}{2\pi}}$$

se obtiene:

Con estos resultados, el desarrollo de la función propuesta nos queda en la forma siguiente:

a) Para aproximación de un término:

$$f(x) = \frac{8}{\pi} \operatorname{sen} x \pm 0{,}1$$

b) Para aproximación de dos términos:

$$f(x) = \frac{8}{\pi} \operatorname{sen} x + \frac{8}{27\pi} \operatorname{sen} 3x \pm 0{,}02$$

Se comprende fácilmente que, con las fórmulas deducidas en este párrafo, se puede también resolver el problema inverso al que venimos de tratar.

Es decir, dada una función f(x), estudiar cuantos términos deben conservarse en su desarrollo de Fourier, para obtener una aproximación fijada de antemano.

Sólo diremos respecto a ésto, que basta fijar el número m de modo que sustituyendo I_m en la fórmula del error, produzca un valor de éste, inferior o a lo sumo igual a la aproximación deseada.

FUNCIONES ORTOGONALES

El concepto de un conjunto de funciones ortogonales es una generalización del de un sistema de vectores mutuamente perpendiculares.

Por eso antes de pasar a tratar las funciones unitarias y ortogonales haremos un repaso en lo referente al cálculo vectorial.

VECTORES UNITARIOS Y ORTOGONALES;

Sea g(r) un vector en un espacio tridimensional y cuyas componentes sobre tres ejes perpendiculares sean g(1), g(2), g(3). A menudo para abreviar designaremos los vectores solamente por g. Como sabemos g(r) es el radio vector del punto de coordenadas: g(1), g(2), g(3). Como se estableció en el estudio del cálculo vectorial la longitud del vector está dada por;

$$g^2(1) + g^2(2) + g^2(3) = N(g) = \sum_{r=1}^{3} g^2(r)$$

Llamando N(g) el cuadrado de la longitud. Si N (g) = 1, g es un vector unitario y se le llama vector normalizado.

Si ahora tenemos dos vectores $g_1(r)$ y $g_2(r)$ sabemos que el producto escalar está definido como;

$$g_1 \cdot g_2 = g_1(1)\, g_2(1) + g_1(2)\, g_2(2) + g_1(3)\, g_2(3)$$

o sea: $$g_1 \cdot g_2 = \sum_{r=1}^{3} g_1(r)\ g_2(r)$$

La condición para que g_1 y g_2 sean ortogonales o perpendiculares es:

$$g_1 \cdot g_2 = 0$$

o expresándolo con relación a sus componentes:

$$\sum_{r=1}^{3} g_1(r)\ g_2(r) = 0$$

De igual modo para normalizar g(r) podemos hacer:

$$g \cdot g = N.(g) = 1$$

Supóngase ahora que tenemos un sistema de tres vectores ortogonales g_1, g_2, g_3 que podemos representar por g_n para n=1, 2, 3. Podemos encontrar un sistema de vectores unitarios φ_n de igual dirección que g_n, dividiendo cada componente de g_n por la longitud de g_n. Así, por ejemplo:

$$\varphi_1(r) = \frac{g_1(r)}{\sqrt{N(g_1)}} \qquad r = 1,2,3$$

Este sistema de vectores perpendiculares φ_n obtenido normalizando los vectores se llama un sistema de vectores unitarios y ortogonales. Un sistema de esta especie puede definirse como:

$$\varphi_m \mid , \varphi_n = \delta_{mn} \qquad m,n = 1,2,3$$

siendo: $\delta_{mn} = 0$ si $m \neq n$

y $\delta_{mn} = 1$ si $m = n$

O sea que la condición requerida para tales sistemas es que cada vector sea perpendicular con cualquier otro y a la vez que sea unitario.

Por el cálculo vectorial sabemos que cualquier vector f puede expresarse como una combinación lineal de los vectores φ_1, φ_2, φ_3. O sea que se puede encontrar tres números c_1, c_2, c_3 tales que:

$$f(r) = c_1 \varphi_1(r) + c_2 \varphi_2(r) + c_3 \varphi_3(r) \qquad (1)$$
$$r = 1,2,3$$

Es en la determinación de los coeficientes c_i en que se aprovecha la propiedad que φ_1, φ_2, φ_3 sean vectores ortogonales y unitarios.

Multipliquemos escalarmente la ecuación (1) por $\varphi_1(r)$.

Tenemos:

$$f \cdot \varphi_1 = c_1 \varphi_1 \cdot \varphi_1 + c_2 \varphi_2 \cdot \varphi_1 + c_3 \varphi_3 \cdot 1 = c_1$$

ya que $\varphi_1 \cdot \varphi_1 = 1$ y $\varphi_2 \cdot \varphi_1 = \varphi_3$, $\varphi_1 = 0$

De igual modo obtenemos c_2 y c_3 multiplicando escalarmente la función vectorial por φ_2 y φ_3 respectivamente. O sea los coeficientes los podemos representar por.

$$c_n = f \cdot \varphi_n \quad \sum_{r=1}^{3} f(r) \quad \varphi_n(r) \qquad n = 1,2,3$$

Luego (1) lo podemos escribir:

$$f(r) = f \cdot \varphi_1 \; \varphi_1(r) + f \cdot \varphi_2 \; \varphi_2(r) + f \cdot \varphi_3 \; \varphi_3(r)$$

$$f(r) = \sum_{r=1}^{3} f \cdot \varphi_n \; \varphi_n(r) \qquad (2)$$

La fórmula (2) se puede llamar un desarrollo del vector arbitrario f en una serie finita de vectores unitarios y ortogonales. Este concepto puede generalizarse para un espacio de n dimensiones o sea que f(r) lo desarrollamos en función de n vectores.

Debe hacerse notar que la normalización (hacer unitario el vector) no es estrictamente necesaria y sólo se efectúa para que el cálculo de los coeficientes salga más sencillo.

ORTOGONALIDAD DE FUNCIONES:

Un vector g(r) en el espacio fué definido por las tres cantidades g(1), g(2), g(3). Una función g(r) que tenga valores reales para r = 1,2 y 3 representará un vector si se supone que esos valores son componentes del vector.

Sea ahora la función g(x) definida para todos los valores de x en el intervalo $a \leq x \leq b$. Para considerar esta función como un vector, los componentes de este consistirán en todas las coordenadas de su gráfico en el intervalo. El argumento x que ha reemplazado a r tiene tantos valores como puntos hay en el intervalo, de modo que el número de componentes es incontable. Luego no es posible sumar respecto a x como lo hicimos respecto a r, sino que debemos sumar por integración.

De este modo el cuadrado de la longitud de la función g(x) está definido por:

$$N(g) = \int_a^b |g(x)|^2 \, dx \qquad (3)$$

y el producto escalar de dos funciones g_m y g_n por:

$$g_m \cdot g_n = \int_a^b g_m(x) \, g_n(x) \, dx$$

Las condición para que las dos funciones sean ortogonales es que:

$$g_m \cdot g_n = 0$$

o bien:

$$\int_a^b g_m(x)\, g_n(x)\, dx = 0 \qquad (4)$$

Luego: Un sistema de funciones $g_n(x)$ para $n = 1,2 \ldots$, es ortogonal en el intervalo (a, b) si se cumple la condición (4) para todo valor $m = n$ para todas las funciones del sistema.

Para normalizar las funciones del sistema dividimos cada función $g_n(x)$ por la longitud $\sqrt{N(g_n)}$. Así obtenemos un sistema de funciones $\varphi_n(x)$ para $n = 1,2,\ldots$ unitario y ortogonal que queda definido por:

$$\varphi_m \cdot \varphi_n = \delta_{mn} \qquad m,n = 1,2,..$$

Lo que escrito de otra forma queda:

$$\int_a^b \varphi_m(x)\, \varphi_n(x)\, dx = 0 \qquad \text{si } m \neq n$$

y

$$\int_a^b \varphi_m(x)\, \varphi_n(x)\, dx = 1 \qquad \text{si } m = n$$

Veamos algunos ejemplos de funciones unitarias y ortogonales. Sean las funciones:

$$1,\ x,\ x^2 \qquad \text{para} \qquad -1 \leq x \leq 1$$

queremos formar un sistema unitario y ortogonal a base de estas funciones.

Para ver si 1 es unitaria hacemos:

$$\int_{-1}^{1} 1^2 \, dx = 2$$

no es unitaria. Luego para normalizarla dividimos por $\sqrt{2}$:

$$\int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 dx = 1$$

Veamos ahora si 1 y x son ortogonales:

$$\int_{1}^{1} 1 \; x \, dx = 0 \qquad\qquad 1 \, . \, x = 0$$

Pero x no es unitaria ya que:

$$\int_{-1}^{1} x^2 \, dx = \frac{2}{3}$$

luego tendrá una función unitaria y ortogonal si ponemos:

$$\sqrt{\frac{3}{2}} \; x$$

Veamos si x^2 es orotogonal con $\underline{1}$

$$\int_{-1}^{1} 1 \, x^2 = \frac{2}{3} \neq 0$$

no es ortogonal con 1 . Para x resulta:

$$\int_{-1}^{1} x \; x^2 \, dx = 0$$

Luego x^2 no sirve ya que sólo es ortogonal con x y no con 1. Buscaremos entonces una función de segundo grado que sea ortogonal con ambas. Sea la función:

$$a x^2 + b x + c$$

Para que sea ortogonal con 1:

$$\int_{-1}^{1} (a x^2 + b x + c)\, dx = \frac{2}{3} a + 2 c = 0$$

Para que sea ortogonal con x:

$$\int_{-1}^{1} x\,(a x^2 + b x + c)\, dx = \frac{2}{3} b = 0$$

Luego tenemos: $b = 0$

y $a = -3c$

La función sería: $c(-3x^2 + 1)$

Sin embargo, esta función hay que normalizarla. Para eso hacemos:

$$\int_{-1}^{1} c^2 (9 x^4 - 6 x^2 + 1)\, dx \quad 2 c^2 \left(\frac{9}{5} - 2 + 1\right)$$

$$= c^2 \frac{8}{5}$$

como debemos tener $c^2 \frac{8}{5} = 1$

tenemos: $$c = \pm \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$$

Luego la función definitiva será:

$$\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} \quad (3x^2 - 1)$$

y el conjunto de funciones unitarias y ortogonales será:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\,x, \quad \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} \quad (3x^2 - 1)$$

El método general para obtener funciones unitarias y ortogonales lo podemos representar del siguiente modo. Sean, por ejemplo, las funciones:

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$$

definidas en el intervalo

$$a \leqslant x \leqslant b$$

Supóngase que queremos obtener un conjunto de funciones ortogonales y unitarias del tipo propuesto. Hacemos:

$$f_1 = a \ \varphi_1$$

de modo que:

$$f_1 \cdot f_1 = 1$$

o sea que f_1 sea unitario.

Luego expresamos f_2 en función de φ_2 y f_1 o sea:

$$f_2 = b\,(\varphi_2 + c\,f_1)$$

para determinar c y b establecemos que:

$$f_2 \cdot f_1 = 0$$

o sea que sean ortogonales, luego:

$$\varphi_2 \cdot f_1 + c = 0$$

de donde $$c = - \varphi_2 \cdot f_1$$

Para calcular b establecemos la condición de que f_2 sea unitario o sea:

$$f_2 \cdot f_2 = 1$$

En seguida expresamos f_3 en fucción de φ_3, f_2 y f_1

$$f_3 = d(\varphi_3 + e\, f_2 + g\, f_1)$$

para determinar d, e y g hacemos:

$f_3 \cdot f_2 = 0$ $\quad \varphi_3 \cdot f_2 + e = 0$ $\quad e = \varphi_3 \cdot f_2$

$f_3 \cdot f_1 = 0$ $\quad \varphi_3 \cdot f_1 + g = 0$ $\quad g = -\varphi_3 \cdot f_1$

para determinar d: $\quad f_3 \cdot f_3 \; 1$

Veamos un ejemplo de aplicación de este método. Sean las funciones

$$1, \; (x - \tfrac{1}{2}), \; x^2$$

definidas en el intervalo

$$0 \leqslant x \leqslant 1$$

Queremos transformarlas en un sistema de funciones unitarias y ortogonales. Luego en este caso

$$\varphi_1 = 1 \; ; \; \varphi_2 = x - \tfrac{1}{2} \; ; \varphi_3 = x^2$$

Hacemos: $$f_1 = a \cdot 1$$

como debe ser unitario

$$\int_0^1 a^2 \; 1^2 \, dx = a^2 \int_0^1 dx = a^2 = 1$$

de donde: $a = 1$ y $f_1 = 1$

Definiremos f_2 como:

$$f_2 = b(x - \frac{1}{2} + c)$$

f_1 y f_2 deben ser ortogonales o sea:

$$f_1 \cdot f_2 = 0$$

y empleando las fórmulas deducidas anteriormente:

$$c = - \varphi_2 \cdot f_1 = -\int_0^1 (x - \frac{1}{2}) dx = -\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \frac{1}{2}\left[x\right]_0^1$$

luego:

$$c = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

entonces $f_2 = b\,(x - \frac{1}{2})$

f_2 debe ser unitaria:

$$\int_0^1 b^2 \, (x^2 - x + \frac{1}{4}) dx = b^2 \quad (\frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}) = \frac{b^2}{12} = 1$$

de donde: $b^2 = 12$

o sea: $b = 2\sqrt{3}$

Luego: $f_2 = 2\sqrt{3}(x - \frac{1}{2})$

Definimos f_2:

$$f_2 = d\left[x^2 + 2\sqrt{3}\, e\left(x - \frac{1}{2}\right) + g\right]$$

según vimos anteriormente:

$$e = -\varphi_3 \cdot f_2 = -2\sqrt{3}\int_0^1 x^2\left(x - \frac{1}{2}\right) dx =$$

$$= -2\sqrt{3}\left\{\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 - \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1\right\}$$

$$e = -2\sqrt{3}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{-12} = -\frac{\sqrt{3}}{6}$$

para calcular g:

$$g = -\varphi_3 \cdot f_1 = -\int_0^1 x^2\, dx = -\frac{1}{3}$$

Por último para calcular d imponemos la condición de que f_3 sea unitario. O sea:

$$\int_0^1 d^2\left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right)^2 dx = d^2 \int_0^1 \left(x^4 - 2x^3 + \frac{4}{3}x^2 - \frac{x}{3} + \frac{1}{36}\right) dx$$

$$\frac{d^2}{180} = 1$$

de donde $$d = 6\sqrt{5}$$

Luego f_3 vale:

$$f_3 = 6\sqrt{5}\left[x^2 - 2\sqrt{3}\,\frac{\sqrt{3}}{6}\left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{3}\right]$$

$$f_3 = 5(6x^2 - 6x + 1)$$

Luego el sistema de funciones unitarias y ortogonales es:

$$1,\ 2\sqrt{3}\left(x - \frac{1}{2}\right),\ \sqrt{5}(6x^2 - 6 + 1)$$

Veamos otro tipo de funciones. Sean:

$$1,\ \cos x,\ \operatorname{sen} x,\ \cos 2x,\ \operatorname{sen} 2x,\ldots$$

definidas para $\quad -\pi \leq x \leq \pi$

Veremos primero si son ortogonales. Para ver si las funciones cosenos son ortogonales con 1, hacemos:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \ dx = \frac{1}{n}\left[\operatorname{sen} nx\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{2}{n} \operatorname{sen} n\pi = 0$$

para $n = 1,2,3..$

Luego son ortogonales. Para ver si las funciones senos son ortogonales con 1 se tiene:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nx \ dx = \frac{-1}{n}\left[\cos nx\right]_{-\pi}^{\pi} = -\frac{1}{n}\left[\cos n\pi - \cos(-n\pi)\right] = 0$$

$n \quad 1,2,3....$

de modo que también son ortogonales. Veamos ahora las funciones senos y cosenos entre sí. Para esto calculamos:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} mx \cos nx \ dx = -\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{m+n}\left[\cos(m+n)x\right]_{-\pi}^{\pi} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{m-n}\left[\cos(m-n)x\right]\right\}$$

$m,\ n = 1,2,3...$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} mx \cos nx \ dx = 0$$

Consideremos las funciones cosenos entre sí:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \ dx = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{m+n}\left[\operatorname{sen}(m+n)x\right]_{-\pi}^{\pi} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{m-n}\left[\operatorname{sen}(m-n)x\right]_{-\pi}^{\pi}\right\}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \ dx = 0 \qquad \text{para } m \neq n$$

Examinemos las funciones senos

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx\, dx = \frac{-1}{2}\left\{\frac{1}{m+n}\left[\operatorname{sen}(m+n)x\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{m-n}\left[\operatorname{sen}(m-n)x\right]_{-\pi}^{\pi}\right\}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx\, dx = 0 \qquad \text{para } m \neq n$$

Luego todas las funciones son ortogonales y sólo queda normalizarlas.

Para normalizar 1 hacemos:

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1^2\, dx = 2\pi$$

Para normalizar los senos y cosenos sabemos que:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mx\, dx = \pi$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^2 mx\, dx = \pi$$

Luego el sistema de funciones unitarias y ortogonales será:

$$\frac{1}{2}\quad \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\operatorname{sen} 2x}{\sqrt{\pi}},\ \ldots\ldots$$

DESARROLLO CON FUNCIONES UNITARIAS Y ORTOGONALES:

Si se nos dá un sistema indefinido de funciones unitarias y ortogonales $\varphi_n(x)$ n 1,2,3,.... podemos tratar de representar una función arbitraria en el intervalo fundamental como una combinación lineal de las funciones $\varphi_n(x)$.

O sea;

$$f(x) = c_1 \varphi_1(x) + c_2 \varphi_2(x) + \ldots\ldots + c_n \varphi_n(x) \qquad (1)$$

$$a \leq x \leq b$$

Esto es una generalización de la propiedad que vimos se verificaba para los vectores. Si las series en la ecuación (1) convergen y si después de ser multiplicadas por $\varphi_n(x)$ pueden ser integradas término a término en el intervalo fundamental (a, b), los coeficientes c_n pueden ser encontrados como se procedió para el caso de los vectores.

Multiplicando escalarmente ambos miembros de la ecuación (1) tenemos:

$$f \cdot \varphi_n = c_1 \varphi_1 \cdot \varphi_n + c_2 \varphi_2 \cdot \varphi_n + \ldots\ldots + c_n \varphi_n \cdot \varphi_n$$

$$f \cdot \varphi_n = c_n$$

Nótese que hemos usado el mismo símbolo para denominar el término de orden n(φ_n) y el sistema de funciones unitarias y ortogonales $\left[\varphi_n(x) \text{ para } n = 1,2,3,\ldots\ldots\right]$

Los factores c_n se llaman "Constantes de Fourier de $f(x)$ correspondientes el sistema unitario y ortogonal n" y pueden escribirse como:

$$c_n = \int_a^b f(x) \varphi_n(x)\, dx \qquad n = 1,2,3\ldots$$

El desarrollo (1) con estos coeficientes se llama la serie de Fourier generalizada correspondiente a $f(x)$, que podemos escribir como:

$$f(x) = \sum_1^\infty c_n \varphi_n(x) = \sum_1^\infty \varphi_n(x) \int_a^b f(\xi) \varphi_n(\xi)\, d\xi \qquad (2)$$

La relación entre f(x) y su desarrollo no será siempre una igualdad. Supóngase que tenemos un vector en tres dimensiones. Si este vector no está en el plano de φ_1 y φ_2 no podemos representar el vector como una función

$$c_1 \varphi_1(r) + c_2 \varphi_2(r)$$

De igual modo puede suceder para el caso de la función.

Si en la fórmula (2) f(x) es $\neq 0$ y ortogonal a todos los $\varphi_n(x)$, todos los términos del segundo miembro son cero y por lo tanto el desarrollo no representa a f(x).

Veamos un ejemplo de desarrollo de una función: Supóngase que queremos desarrollar:

$$h(x) = \log_{10} \left(\frac{9}{2} x + \frac{11}{2}\right)$$

en función de:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} x, \quad \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} (3x^2 - 1)$$

en el intervalo $-1 \leq x \leq 1$.

Sea entonces:

$$h(x) = \log_{10}\left(\frac{9}{2} x + \frac{11}{2}\right) = a_1 \frac{1}{\sqrt{2}} + a_2 \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} x + a_3 \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} (3x^2 - 1)$$

Para calcular los coeficientes multiplicamos escalarmente por la función correspondiente a cada coeficiente.

$$\sqrt{\frac{1}{2}}\, a_1 = \frac{1}{2} h \cdot 1 = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \log \left(\frac{9}{2} x + \frac{11}{2}\right) dx$$

hagamos:

$$y = \frac{9}{2} x + \frac{11}{2}$$

de donde: $dx = \frac{2}{9}\, dy$

luego la integral queda, luego de resolverla por partes:

$$\sqrt{\tfrac{1}{2}}\, a_1 = \frac{1}{9} \int_1^{10} \log y \, dy = \frac{1}{9}\left[10 - 0{,}4343 \cdot 9\right]$$

$$= 1{,}1111 - 0{,}4343 = 0{,}6768$$

Veamos ahora para $\sqrt{\tfrac{3}{2}}\, a_2$:

$$\sqrt{\tfrac{3}{2}} a_2 = \tfrac{3}{2} h \cdot x = \tfrac{3}{2} \int_{-1}^{1} x \log y \, dx = \frac{1}{27} \int_1^{10} (2y - 11) \log y \, dy$$

integrando por partes obtenemos:

$$\tfrac{3}{2} a_2 = \frac{1}{27}\left\{\left[(y^2 - 11y) \log y\right]_1^{10} - 0{,}4343 \int_1^{10} (y - 11)\, dy\right\}$$

$$= \frac{1}{27}\left[-10 - 0{,}4343 \left(\frac{99}{2} - 99\right)\right] = 0{,}4258$$

Calculemos $\sqrt{\tfrac{5}{8}}\, a_3$:

$$\sqrt{\tfrac{5}{8}}\, a_3 = \tfrac{5}{8} (3x^2 - 1) \cdot h = \tfrac{5}{8} \int (3x^2 - 1) \log y \, dx$$

$$\sqrt{\tfrac{5}{8}}\, a_3 = \frac{5}{4 \cdot 9^3} \int_1^{10} \left[3(2y - 11)^2 - 9^2\right] \log y \, dy =$$

$$= \frac{5}{4 \cdot 3^5} \int_1^{10} (4y^2 - 44y + 94) \log y \, dy$$

e integrando por partes obtenemos:

$$\sqrt{\frac{5}{8}}\, a_3 = \frac{5}{4 \cdot 3^5} \left\{ \left[\log y \left(\frac{4}{3} y^3 - 22 y^2 + 94 y \right) \right]_1^{10} - \right.$$

$$\left. - 0{,}4343 \int_1^{10} \left(\frac{4}{3} y^2 - 22 y + 94 \right) \, dy \right\}$$

$$= \frac{5}{4 \cdot 3^5} \left[\frac{4.000}{3} - 2.200 + 940 - 0{,}4343 \, (444 - \right.$$

$$\left. - 1.089 + 846 \right]$$

$$\sqrt{\frac{5}{8}}\, a_3 = - 0{,}0174$$

De este modo aproximamos $\log \left(\frac{9}{2} x + \frac{11}{2} \right)$ en el intervalo $-1 \leq x \leq 1$ por:

$$\log\left(\frac{9}{2} x + \frac{11}{2}\right) = 0{,}6768 + 0{,}4258\, x - 0{,}0174\, (3 x^2 - 1)$$

$$= 0{,}6942 + 0{,}4258\, x - 0{,}0522\, x^2$$

El cálculo de a_1, a_2 y a_3 resultó algo complicado debido a que las funciones ortogonales que se usaron para el desarrollo eran algo raras.

A continuación compararemos los resultados obtenidos dando a y valores y calculando su logaritmo con tabla y con la función.

Para eso debemos expresar $\log y$ en función de y. Haciendo los cálculos y recordando que $y = \frac{9}{2} x + \frac{11}{2}$ queda:

$$\text{Log } y = 0{,}1013 + 0{,}1210\, y - 0{,}0024\, y^2$$

y dándole valores a y:

y	Tabla log y	Desar. log y
1	0,000	0,122
2	0,301	0,334
3	0,477	0,443
4	0,602	0,547
5	0,699	0,646
6	0,778	0,741
7	0,845	0,831
8	0,903	0,916
9	0,954	0,996
10	1,000	1,071

Veamos otro ejemplo. Sea la función $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$ que queremos desarrollar en función lineal de :

$$1,\ 2\sqrt{3}\,(x - \tfrac{1}{2}),\ \sqrt{5}\ (6x^2 - 6x + 1)$$

en el intervalo $0 \leq x \leq 1$

Tenemos:

$$\sqrt{1 + x^2} = a_1\ 1 + a_2\ \sqrt{3}(2x - 1) + a_3\ \sqrt{5}(6x^2 - 6x + 1)$$

Calculemos los coeficientes:

$$a_1 = \int_0^1 \sqrt{1 + x^2}\ dx = \left[\frac{x}{2}\ \sqrt{1 + x^2} + \frac{1}{2} L(x + \sqrt{1 + x^2})\right]_0^1$$

$$a_1 = \frac{1}{2}\left[\sqrt{2} + L(1 + \sqrt{2})\right] = \frac{1}{2}\quad \left[1,4142 + 0,8796\right]$$

$$a_1 = 1,1496$$

Calculemos ahora:

$$\sqrt{3}\, a_2 = 3 \int_0^1 (2x - 1)\sqrt{1 + x^2}\, dx = 3\left[\int_0^1 2x\sqrt{1 + x^2}\, dx - \int_0^1 \sqrt{1 + x^2}\, dx\right]$$

sabemos que:

$$\int_0^1 \sqrt{1 + x^2}\, dx = 1,1469$$

avaluemos;

$$\int_0^1 2x\sqrt{1 + x^2}\, dx = \frac{2}{3}\left[(1+x^2)\right]_0^1 = \frac{2}{3}(\sqrt{8} - 1)$$

luego:

$$3\, a_2 = 3\left[\frac{2}{3}(\sqrt{8} - 1) - 1,1469\right] = 2(2\sqrt{2} - 1) - 3 \cdot 1,1469$$

$$\sqrt{3}\, a_2 = 0,1993$$

Calculemos a_3:

$$\sqrt{5}\, a = 5 \int_0^1 (6x^2 - 6x + 1)\sqrt{1 + x^2}\, dx$$

$$= 5\left[6\int_0^1 x^2\sqrt{1 + x^2}\, dx - 3\int_0^1 2x\sqrt{1+x^2}\, dx + \int_0^1 \sqrt{1 + x^2}\, dx\right]$$

Calculando la integral

$$\int_0^1 x^2\sqrt{1 + x^2}\, dx$$

se obtiene; $\int_0^1 x^2 \sqrt{1+x^2}\, dx \quad 0,4193$

y reemplazando los valores encontrados para las otras integrales, se tiene:

$$\sqrt{5}\, a_3 = 5\left[6 \cdot 0,4193 - 2(2\sqrt{2} - 1) + 1,1469\right.$$

$$\sqrt{5}\, a_3 = 0,1135$$

Luego tenemos por fin:

$$\sqrt{1+x^2} = 1,1496 + 0,1993\,(2x - 1) + 0,1136\,(6x^2 - 6x + 1)$$

$$\sqrt{1+x^2} = 1,0638 - 0,2824\,x + 0,6810\,x^2$$

Supongamos que ahora queremos desarrollar f(x) en función de:

$$\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\operatorname{sen} 2x}{\sqrt{\pi}},\ \ldots\ldots$$

en el intervalo

$$-\pi \leqslant x \leqslant \pi$$

tendríamos:

$$f(x) = a_0\ \frac{1}{2}\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} + a_1\ \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}} + b_1\ \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{\pi}} + a_2\ \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}} +$$

$$+ b_2\ \frac{\operatorname{sen} 2x}{\sqrt{\pi}} + \ldots\ldots$$

para calcular los coeficientes sabemos que:

$$a_0 = f \cdot \frac{1}{2}\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}$$

pero como nos conviene más calcular $\frac{a_0}{\sqrt{\pi}}$ ponemos:

$$\frac{a_0}{\sqrt{\pi}} = f \cdot \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{2}}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx$$

y de igual modo:

$$\frac{a_1}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos x \, dx$$

$$\frac{b_1}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} x \, dx$$

de igual modo se puede calcular el resto de los coeficientes. En capítulo aparte se vió que esta serie da origen a las llamadas Series de Fourier.

Si las funciones $\varphi_n(x)$ para $n = 1,2,3,\ldots$ son ortogonales y no unitarias, los coeficientes del desarrollo:

$$f(x) = c_1 \varphi_1(x) + c_2 \varphi_2(x) + \ldots + c_n \varphi_n(x)$$

están dados por:

$$f(x) \cdot \varphi_n(x) = c_n \varphi_n(x) \cdot \varphi_n(x)$$

$$c_n = \frac{f(x) \cdot \varphi_n(x)}{\varphi_n(x) \cdot \varphi_n(x)}$$

APROXIMACION EN EL DESARROLLO CON FUNCIONES UNITARIAS Y ORTOGONALES:

Supóngase que $K_m(x)$ represente una combinación lineal finita de m funciones de un sistema unitario y ortogonal $\varphi_n(x)$ $n = 1,2,3, \ldots$ y definido en el intervalo $a \leq x \leq b$.

Luego:

$$K_m(x) = h_1 \varphi_1(x) + h_2 \varphi_2(x) + \ldots + h_m \varphi_m(x) \quad (1)$$

Trataremos de encontrar los valores de las constantes h_m de modo que (1) represente la mejor aproximación de una función dada $f(x)$, o sea queremos que:

$$I_m = \int_a^b \left[f(x) - K_m(x) \right]^2 dx \qquad (2)$$

sea mínimo (principio de los cuadrados mínimos).

Calculemos el mínimo de (2). Derivando respecto a h_n (ya que estas son las variables) tenemos:

$$\frac{\partial I_m}{\partial h_m} = -\int_a^b 2 \left[f(x) - K_m(x) \right] \varphi_m(x)\, dx$$

$$\frac{\partial I_m}{\partial h_m} = -2 \left[\int_a^b f(x)\ \varphi_m(x)\, dx - h_m \right]$$

ya que: $\int_a^b K_m(x)\ \varphi_m(x)\, dx = K_m(x)\ .\ \varphi_m(x) = h_m$

El mínimo está dado por:

$$\frac{\partial I_m}{\partial h_1} = \frac{\partial I_m}{\partial h_2} = \ldots\ldots = \frac{\partial I_m}{\partial h_m} = 0$$

o sea: $$h_m = \int_a^b f(x)\ \varphi_n(x)\, dx$$

que es la misma expresión que obtuvimos para las constantes de Fourier

$$c_n = \int_a^b f(x)\ \varphi_n(x)\, dx$$

Por lo tanto las constantes de Fourier de una función f(x) desarrollada en série de funciones unitarias y ortogonales $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots\ldots \varphi_n$ son aquellos coeficientes para los cuales la combinación lineal $K_m(x)$ de esas funciones representa la mejor aproximación a f(x) en el intervalo (a, b).

El error de $K_m(x)$ está definido por:

$$\varepsilon_m^2 = \frac{1}{b-a} \int_a^b \delta_m^2 (x)\, dx$$

siendo:

$$\delta_m(x) = f(x) - K_m(x)$$

o sea que (2) lo podemos escribir como :

$$I_m = \int_a^b \delta_m^2 (x)\, dx$$

o bien;

$$I_m = \varepsilon_m^2 (b - a)$$

de donde:

$$\varepsilon_m = \sqrt{\frac{I_m}{b-a}}$$

FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA

Estudiaremos en este capítulo algunos elementos de la Teoría de las Funciones de Variable Compleja.

Recordaremos para este efecto, algunas propiedades fundamentales de los números complejos, que nos serán de utilidad en el desarrollo de este capítulo.

NUMEROS COMPLEJOS: Sea el número complejo:

$$z = x + iy \qquad (1)$$

Definimos:

Parte real de $z = \text{Re } z = x$
Parte imag. de $z = \text{Im } z = y$

de modo que: $z = \text{Re } z + i \text{ Im } z$ (forma aditiva)

Sabemos que: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$\arg z = \text{arc tg } \frac{y}{x}$$

También podemos expresar z en la forma:

$$z = \rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) = \rho e^{\theta i} \qquad (2)$$

siendo: $\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$\arg z = \theta$$

o sea; $z = |z| e^{i \arg z}$ (forma multiplicativa).

De igual modo el complejo conjugado de z será:

$$z^* = x - iy = \rho e^{-\theta i}$$

y se obtiene de las fórmulas (1) y (2) reemplazando i por (- i). Podemos poner también

$$z^* = R_e\, z - i\, Im\, z$$

$$z^* = |z|\, e^{-i \arg z}$$

De la definición de z y z^* se deducen las siguientes relaciones:

$$z + z^* = 2\, Re\, z$$

$$z - z^* = 2i\, Im\, z$$

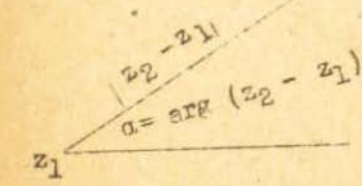
$$z z^* = z^2$$

$$\frac{z}{z^*} = e^{2i \arg z}$$

LUGARES GEOMETRICOS DE NUMEROS COMPLEJOS:

1) Si tenemos dos números complejos z_1 y z_2, se tiene que su distancia es:

$$|z_2 - z_1|$$



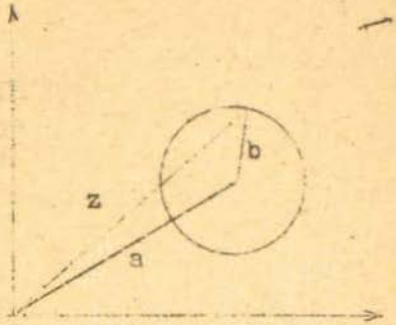
y el ángulo que forma la recta z_1 z_2 con el eje es:

$$\alpha = \arg (z_2 - z_1)$$

2) Si tenemos la relación:

$$|z - a| = b$$

esta es la ecuación de una circunferencia de centro a y radio b.



3) De igual modo la relación:

$$\left|\frac{z - a}{z - b}\right| = c = \frac{m}{n}$$

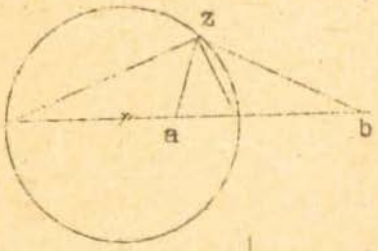
representa la ecuación del círculo de Apolonio.

Si c = 1 el Círculo de Apolonio se transforma en la recta simetral del trazo ab

$$|z - a| = |z - b|$$

o también

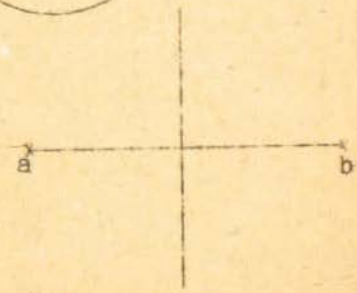
$$\left|\frac{z - a}{z - b}\right| = 1$$



4) La relación:

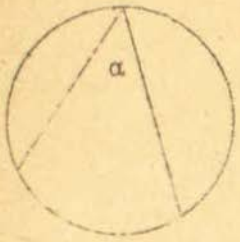
$$\alpha = \arg \frac{z - a}{z - b} = c = cte$$

representa el arco capaz del ángulo.



5) La ecuación de una elipse de focos a y b será;

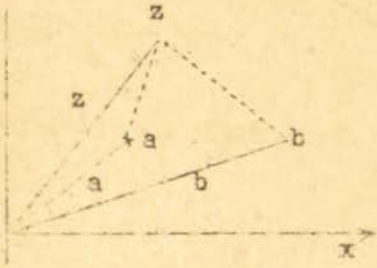
$$|z - a| + |z - b| = c$$



6) La ecuación de una parábola de foco a, será:

$$|z - a| = Re\ z$$

7) Si un vector representativo de un número complejo se quiere girar en $\frac{\pi}{2}$ se le suma el argumento de $e^{\frac{\pi}{2}i}$ pero:

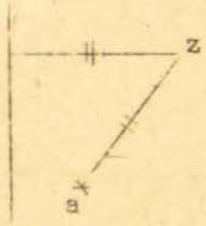


$$e^{\frac{\pi}{2}i} = \cos\frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = i$$

o sea que para girar un complejo en $\frac{\pi}{2}$ basta multiplicarlo por i. Para estos casos conviene recordar la relación:

$$\frac{1}{i} = -i$$

Se tiene también:



$$e^{\frac{\pi}{2}i} = \cos\frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = i$$

$$e^{\pi i} = \cos\pi + i \operatorname{sen}\pi = -1$$

$$e^{\frac{3}{2}\pi i} = \cos\frac{3\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{3\pi}{2} = -i$$

$$e^{2\pi i} = \cos 2\pi + i \operatorname{sen} 2\pi = 1$$

En el plano complejo también podemos representar las curvas por ecuaciones paramétricas.

Así la ecuación de la recta sería:

$$z = a + bt$$

siendo t real, y la de la circunferencia:

$$z = a + r e^{ti}$$

siendo la ecuación de la circunferencia central y unitaria:

$$z = e^{ti} \qquad |z| = 1$$

FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA:

Si tenemos $w = f(z)$

siendo $z = x + iy$

se tendrá: $w = u(x, y) + i\ v(x, y)$

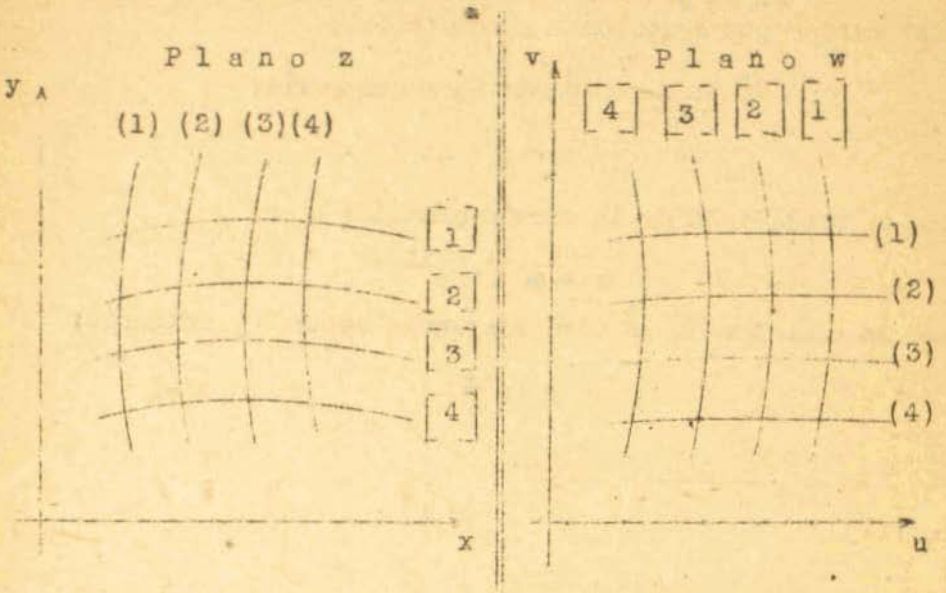
o sea que w debería representarse en un plano de cuatro dimensiones. En vez de eso hacemos la representación en dos planos; el plano z y el plano w.

Así, por ejemplo, a la curva (1) del plano z correspondería una curva (1) del plano w; y a una $\lfloor 1 \rfloor$ del primero, una $\lfloor 1 \rfloor$ del segundo.

(Ver figura en la pág. siguiente)

Veremos algunos ejemplos de esta representación.

1) $w = z + a$ (a complejo)



Se produce sólo una translación, es decir la figura en el plano x está sólo trasladada con respecto a la del plano z. Por lo tanto las figuras son congruentes.

2) $w = e^{ai} z$ (a real)

En este caso las figuras de w están giradas en un ángulo a respecto a las figuras del plano z. O sea existe rotación, ya que e^{ai} es un operador rotacional.

3) $w = m z$ (m real)

Las figuras son homotéticas en la razón 1 : m.

4) $w = c z + d$ (1)

siendo c y d complejos

$$c = |c| e^{i \arg c}$$

$|c|$ produce homotecia; $e^{i \arg c}$, giro y $\underline{d}$ produce traslación.

Luego es similitud (conserva los ángulos). El centro de similitud se caracteriza por trasformarme en sí mismo, es:

$$w_o = z_o$$

$$z_o = c\ z_o + d \qquad (2)$$

Por lo tanto: $$w_o = z_o = \frac{d}{1 - c}$$

si restamos (1) y (2) tenemos:

$$w - w_o = c(z - z_o)$$

5) Veamos otro ejemplo. Sea:

$$w = \frac{1}{|z|} = \frac{z^*}{z^2}$$

para $z = 0$; w no existe; o sea el origen no tiene punto correspondiente.

Tampoco hay un valor de z que produzca $w = 0$, Creamos un punto $z = \infty$ y uno $w = \infty$ tal que sea

$$\infty = \frac{1}{0} \qquad ; \qquad 0 = \frac{1}{\infty}$$

Formemos una tabla de valores de la función y hagamos un gráfico.

z	w
1	1
-1	-1
1	-i
0	0

$$w = \frac{1}{z} = \frac{1}{|z|}\, e^{-i \arg z}$$

$$w = |w|\, e^{i \arg w} = \frac{e^{-i \arg z}}{|z|}$$

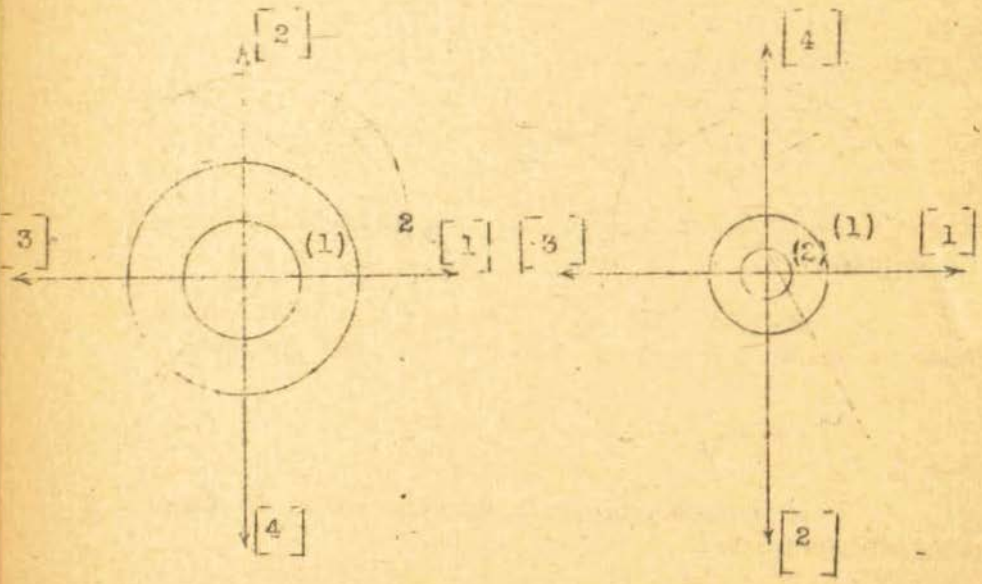
Por lo tanto:

$$|w| = \frac{1}{|z|} \qquad |w| \cdot |z| = 1^2$$

o sea se produce una inversión de las distancias; sería una inversión geométrica si los argumentos quedaran iguales. Pero por otra parte:

$$\arg w = - \arg z$$

se produce además una simetría (se conservan los ángulos). Luego el total es inversión con simetría:



Si dibujamos en el plano z una circunferencia de radio $|z| = 1$ en el plano w corresponde una circunferencia de radio 1. Si dibujamos en el plano z, una circunferencia de radio $|z| = 2$, en el w corresponde una de radio $|w| = 1/2$.

Si dibujamos en el plano z una semi-recta de arg $z = 0$ corresponde en w una semi - recta de arg $w = 0$. Si dibujamos en z una de arg $z = \frac{\pi}{2}$ en el w corresponde una semi-recta de arg $w = -\frac{\pi}{2}$, etc.

6) Veamos la función:

$$w = \frac{d\,z + b}{c\,z + d} \qquad (1)$$

Transformaremos esta expresión:

$$w = \frac{a\,c\,z + b\,c}{c\,(c\,z + d)} = \frac{a\,c\,z + b\,c + a\,d - a\,d}{(c\,z + d)}$$

$$w = \frac{a(c\,z + d) + b\,c - a\,d}{c(c\,z + d)} = \frac{a}{c} + \frac{b\,c - a\,d}{c\,(c\,z + d)}$$

$$w = \frac{a}{c} - \frac{a\,d - b\,c}{c^2} \cdot \frac{1}{z + \frac{d}{c}}$$

Para estudiar las transformaciones que se produce, iremos estudiándolas una por una. Empecemos por el denominador.

Sea: $$z_1 = z + \frac{d}{c}$$

según vimos en este caso, se producía traslación.

$$z_2 = \frac{1}{z_1}$$

en este caso se producía inversión simétrica

$$z_3 = -\frac{a\,d - b\,c}{c^2}\, z_2$$

se produce en este caso homotecia con giro. Por último

$$w = z_3 + \frac{a}{c}$$

produce nuevamente traslación. Luego en total se produce: traslación, inversión simétrica, homotecia con giro y traslación. Luego se conservan los ángulos.

De (1) podemos despejar z:

$$w(c\,z + d) = c\,w\,z + d\,w = a\,z + b$$

de donde:

$$z = \frac{d\,w - b}{a\,c\,w}$$

Sea la circunferencia $|z - m| = n$, en el plano z.

Estudiaremos que figura produce en el plano w.

Reemplazando z por su valor, la expresión $|z - m| = n$ se transforma en:

$$\left|\frac{d\,w - b}{-c\,w + a}\right| - m = n$$

$$\left|\frac{p\,w + q}{-c\,w + a}\right| = n$$

$$\left|\frac{p}{-c}\right| \left|\frac{w + \frac{q}{p}}{w - \frac{a}{c}}\right| = n \,.$$

que vimos que era la expresión del círculo de Apolonio.

O sea que una circunferencia del plano z se

transforma en una circunferencia del plano w. Sin embargo debemos recordar que el Círculo de Apolonio se transforma a veces en recta. Luego una circunferencia del plano z puede ser eventualmente una recta en el plano w y vice-versa.

Para saber si una imagen de circunferencia es una recta, debemos estudiar si ésta contiene el punto ∞

Veamos la imagen que

$$w = \frac{2z + 1}{z - 1}$$

produce de la circunferencia

$$|z + 2| = 3 \qquad \text{para } z = 1$$

se tiene $w = \infty$

pero $z = 1$ es un punto de la circunferencia, pues:

$$|3| = 3$$

luego la imagen es recta; para determinar esta recta necesitamos dos puntos:

para $z = -5$

$$w = \frac{-10 + 1}{-6} = \frac{5}{3} - \frac{1}{6}$$

para $z = -2 + 3i$

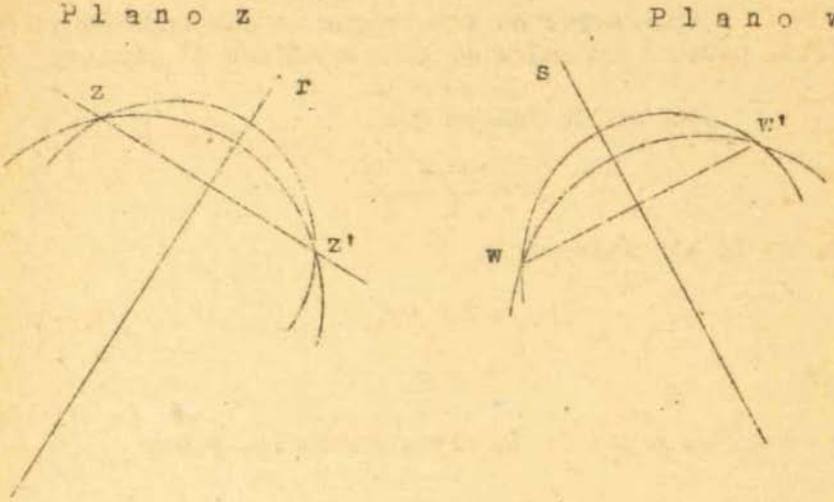
$$w = \frac{-4 + 7i}{3i - 3} = \frac{-33 + 9i}{-18} = \frac{11}{6} - \frac{i}{2}$$

con lo cual queda determinada la recta.

Supongamos que en la expresión:

$$w = \frac{az + b}{cz + d}$$

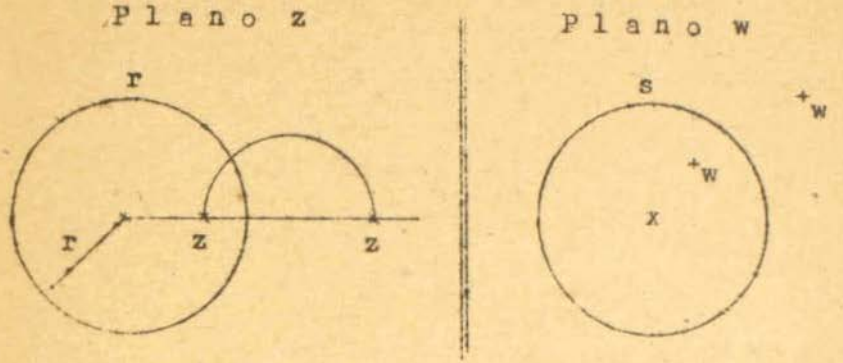
a una recta en el plano z, corresponde una recta en el plano w . Sean r y s estas rectas. Elijamos dos puntos simétricos z y z'. Sea w el punto correspondiente a z . Queremos saber que punto corresponde a z'.



Todas las circunferencias que pasan por z y z' cortan perpendicularmente a r. Como las circunferencias del plano z se transforman en circunferencias en el plano w, esto mismo debe regir en este último plano, puesto que los ángulos se conservan.

Luego w' es simétrico de w respecto a s. O sea a pares de puntos simétricos corresponden pares de puntos simétricos.

Si no se trata de rectas, sino de circunferencias, veremos lo que sucede.



Sean dados z, z' y w. Se quiere saber que punto corresponde a z', siendo z y z' puntos simétricos con respecto a la circunferencia. O sea son puntos armónicos. La circunfernncia de diámetro igual a su distancia es el Círculo de Apolonio. Su diámetro, según un teorema de Polos y Polares es:

$$z' - a = \frac{r^2}{\bar{z} - \bar{a}}$$

Las circunferencias que pasan por z y z' se transformarán en circunferencias en el plano w y entonces w será el inverso de w (puntos armónicos).

Queremos transformar la circunferencia $|z|=1$ en la circunferencia $|w|=1$ por medio de una de las funciones

$$w = \frac{a\ z + b}{c\ z + d}$$

Hagamos que a $w=0$ corresponda $z = z_0$ entonces $w=\infty$ corresponderá a $z=\frac{1}{\bar{z}}$ (según el párrafo visto anteriormente).

Podemos poner;

$$w = \frac{a}{d} \frac{z + \frac{b}{a}}{1 + \frac{c}{d} z}$$

para $w = 0$ $\qquad z = -\frac{b}{a} = z_o$

$w = \infty$ $\qquad \frac{1}{z} = -\frac{c}{d} = z_o^*$

Hagamos $\qquad \frac{a}{d} = \eta$

Entonces w queda;

$$W = \eta \frac{z - z_o}{1 - z_o^* z}$$

para $z = 1$ $\qquad w = \eta \frac{1 - z_o}{1 - z_o^*}$

$$|w| = 1 = \left| \eta \frac{1 - z_o}{1 - z_o^*} \right| = |\eta|$$

ya que $\qquad \left| \frac{1 - z_o}{1 - z_o^*} \right| = 1$

luego $\qquad |\eta| = 1$

Por lo tanto la ecuación de transformación de circunferencia en circunferencia es:

$$w = \eta \frac{z - z_o}{1 - z_o^* z} \qquad \text{siendo } |\eta| = 1$$

como se vé;

para $z = 0$ $\qquad w = -\eta z_o$

$$z = \infty \qquad w = -\frac{\eta}{z_o^2}$$

La ecuación de la circunferencia la podemos escribir como:

$$w = \eta \frac{1 - z_o \frac{1}{z}}{\frac{1}{z} - z_o^*}$$

7) Veamos la función:

$$w \quad z^2$$

sabemos que: $z = |z| e^{i \arg z}$

y $w = |w| e^{i \arg w}$

Luego: $|w| e^{i \arg w} = z^2 = |z|^2 e^{2i \arg z}$

de donde: $|w| = |z^2|$

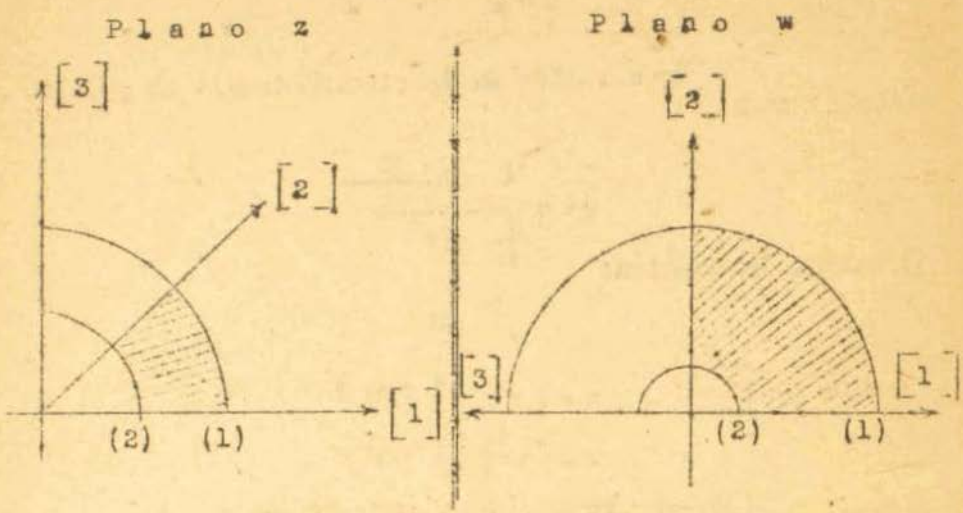
y $\arg w = 2 \arg z$

Hagamos la representación en los planos z y w.

(Ver fig. en la pág. siguiente)

A un arco de circunferencia de radio $|z| = 1$ corresponde un arco de circunferencia de radio $|w| = 1$. A un arco de circunferencia de radio $|z|_1 = \frac{1}{2}$ corresponde un arco de circunferencia de radio $|w| = \frac{1}{4}$.

A la semi-recta del plano z correspondiente a $\arg z = 0$ corresponde una semi-recta de $\arg w = 0$. Para un $\arg z = \frac{\pi}{4}$ corresponde un $\arg w = \frac{\pi}{2}$. O sea a la figura achurada del plano z corresponde la del plano w.



A un arg $z = \frac{\pi}{2}$ corresponde un arg $w = \pi$. O sea que los ángulos rectos se conservan, menos en el origen en que se duplican.

8) Estudiemos la función:

$$w = e^z$$

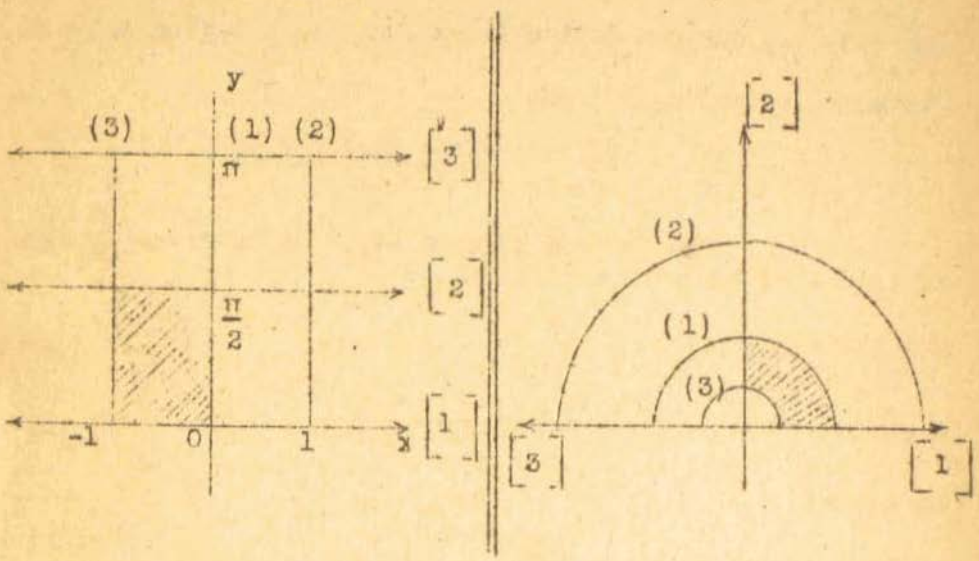
$$z = x + iy$$

se tiene: $w = |w| e^{i \arg w} = e^x e^{iy}$

de donde $|w| = e^x$

y $\arg w = y$

Hagamos la representación de esta función en los dos planos.



A la recta x = 0 del plano z le corresponde una circunferencia $|w| = 1$ del plano w. A la recta x = 1, una circunferencia $|w| = e$ y a la recta x = - 1, una circunferencia $|w| = \frac{1}{e}$.

A la recta y = 0 le corresponde la semi-recta $[1]$ del plano w. A $y = \frac{\pi}{2}$ le corresponde $[2]$; y a $y = \pi$ le corresponde $[3]$

O sea el área achurada del plano z le corresponde el área achurada del plano w.

FUNCIONES ANALITICAS;

Son aquellas funciones de variable compleja que poseen derivadas en toda una región. Se les llama tambien regulares, monogénicas y holomorfas.

Sea w una función de z, definida por medio de la ecuación;

$$w = f(z)$$

que exigimos que sea derivable en una cierta región del plano.

Definimos su derivada como:

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

Estudiaremos algunos tipos de funciones y examinaremos si son o no derivables.

Sea por ejemplo ;

$$w = z^2$$

$$w + \Delta w = (z + \Delta z)^2$$

$$\Delta w = 2 z \Delta z + (\Delta z)^2$$

de donde:

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = 2 z + \Delta z$$

o sea:

$$w' = 2 z$$

Esto muestra que la función $f(z) = z^2$ es derivable y por lo tanto analítica.

Podemos decir que las potencias de variable compleja tienen su derivada idéntica a las potencias de variable real.

Consideremos ahora la función:

$$w = \mathrm{Re}\ z$$

$$w + \Delta w = \mathrm{Re}\ (z + \Delta z) = \mathrm{Re}\ z + \mathrm{Re}\ \Delta z$$

$$\Delta w = \mathrm{Re}\ \Delta z = \Delta x$$

Entonces:

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\Delta x}{\Delta x + i \Delta y}$$

Ahora para hacer que $\Delta z \longrightarrow 0$, nos acercare - mos primero paralelamente al eje de las X, con lo cual $\Delta y = 0$. Nos queda:

$$\lim_{\Delta z \longrightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = 1$$

Si nos acercamos en seguida paralelamente al eje de las Y, tendremos $\Delta x = 0$ y con esto:

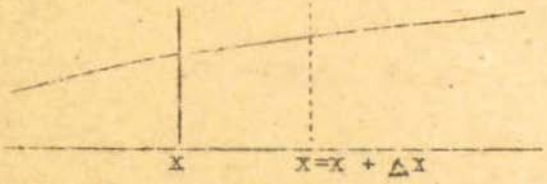
$$\lim_{z \longrightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = 0$$

Observamos entonces que la función $f(z) = \text{Re } z$, puede tener dos derivadas diferentes, según el modo en que z tiende a cero.

Decimos por tanto que la función $f(z) = \text{Re } z$ no es derivable y por esto no analítica.

CONDICION DE DERIVABILIDAD:

Antes de deducir estas condiciones, haremos al- gunas consideraciones sobre el concepto de límite en el campo complejo.



En el campo real, se afirma que la función f(x) tiene un límite único, cuando $x \longrightarrow x_o$, si se verifica la sola condición:

$$f(x_o + 0) = f(x_o - 0)$$

En el campo complejo, en cambio, la variable z puede acercarse a z_o de infinitas maneras, e imponemos la condición de que todos los límites que así se obtengan sean iguales. En particular exigimos que sean iguales aquellos que correspondan a un acercamiento horizontal (Δz real) y a uno vertical, (Δz imaginario).

Deduciremos ahora la condición necesaria de derivabilidad.

Sea la función:

$$w = u + i\ v$$

siendo $u = u(x, y)$ $\quad v = v(x, y)$

Evidentemente: $$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\Delta u + i\,\Delta v}{\Delta x + i\,\Delta y}$$

Cuando $$\Delta y = 0$$

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\Delta u + i\,\Delta v}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + i\ \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

y si $\Delta x \longrightarrow 0$

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} \longrightarrow \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial y}{\partial x} \qquad (1)$$

Ahora, si $\Delta x = 0$

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\Delta u + i\ \Delta v}{i\ \Delta y} = \frac{\Delta v}{\Delta y} = -i\ \frac{\Delta u}{\Delta y}$$

y al hacer que: $\Delta y \longrightarrow 0$

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} \longrightarrow \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} \qquad (2)$$

Como los límites (1) y (2) deben ser iguales, debe verificarse:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

e igualando partes real e imaginaria,

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}} \qquad \boxed{\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}}$$

Estas ecuaciones representan la condición necesaria y también suficiente, según podría demostrarse, para que la función:

$$w = u + i\ v$$

sea analítica, es decir posea una derivada única. Ellas se conocen con el nombre de "ecuaciones de Cauchy-Riemann".

Derivando parcialmente estas ecuaciones sucesivamente con respecto a las variables x e y, obtenemos:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} \qquad (3) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \qquad (4)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \qquad (5) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} \qquad (6)$$

y combinando las ecuaciones (3) y (6), y del mismo modo las ecuaciones (4) y (5), se obtiene:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

que se pueden escribir en la forma:

$$\nabla^2 u = 0 \qquad \nabla^2 v = 0$$

Estas ecuaciones, se conocen con el nombre de ecuaciones de Laplace. (∇^2 operador Laplaciano).

Estudiemos ahora algunos tipos especiales de funciones:

1) Sea: $u = e^x \cos y \qquad v = e^x \operatorname{sen} y$

Se tiene: $\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y$

y $\frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \operatorname{sen} y; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = e^x \operatorname{sen} y$

Como estas funciones satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann, deducimos que existe una función de variable compleja diferenciable, definida por la ecuación:

$$w = u + i\,v = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y) = e^{x+yi}$$

que se escribe: e^z

Como sabemos que esta función es analítica, calculemos su derivada. Escribamos:

$$\frac{d\,e^z}{dz} = \frac{\partial(e^x\, e^{iy})}{x}$$

ya que es lícito acercarse en cualquiera dirección:

Efectuando la derivación parcial con respecto a x, se encuentra:

$$\frac{de^z}{Ddz} = e^x \cdot e^{iy} = e^z$$

Resumiendo, si tenemos la función:

$$w = e^z$$

encontramos que su derivada vale:

$$\frac{dw}{dz} = e^z$$

lo que muestra que esta función se deriva idénticamente a la función exponencial de variable real.

2) Si se quiere ahora que la función:

$$u = x \quad f(y)$$

sea analítica, puede escribirse que ella satisface la ecuación de Laplace:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

pero notando que:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

se deduce que:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

lo que asegura que la función u, debe ser de la forma:

$$u = x(a\,y + b)$$

Debe determinar ahora la función v, para lo cual aplicamos las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad ; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = - \frac{\partial u}{\partial y}$$

Reemplazando en ellas los valores de $\frac{\partial u}{\partial x}$ y de $\frac{\partial u}{\partial y}$ se obtiene:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = a y + b \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = - a x$$

Integrando estas ecuaciones, se encuentra:

$$v = \frac{a}{2} y^2 + b y + A(x)$$

$$v = - \frac{a}{2} x^2 + B(y)$$

Comparando ambas soluciones, se obtiene:

$$A(x) = - \frac{a}{2} x^2 + C_1$$

$$B(y) = \frac{a}{2} y^2 + b y + C_2$$

con lo cual la solución final es:

$$v = \frac{a}{2} (y^2 - x^2) + b y + C$$

En seguida, considerando que:

$$w = u + i \; v$$

deducimos que:

$$w = x(a y + b) + \frac{a i}{2} (y^2 - x^2) + b i y \; C i$$

que puede escribirse:

$$v = - \frac{a i}{2} (x^2 + 2 i x y - y^2) + b (x + i y) + Ci$$

o sea; $$w = -\frac{a\,i}{2} z^2 + b\,z + C\,i$$

3) Estudiemos en seguida la derivada del logaritmo complejo;

Si tenemos; $$w = \log z$$

podemos escribir; $$z = e^w$$

y como sabemos que; $$\frac{dz}{dw} = e^w$$

deducimos que; $$\frac{dw}{dz} = \frac{1}{e^w} = \frac{1}{z}$$

o sea; $$\frac{d(\log z)}{dz} = \frac{1}{z}$$

Ya que hablamos de logaritmo complejo, daremos a éste una expresión más conveniente;

Si tenemos; $$w = \log z$$

escribimos como anteriormente; $$z = e^w = e^{u+iv}$$

Por otra parte, todo complejo z, puede ponerse en la forma; $$z = |z|\, e^{i \arg z}$$

y comparando esta ecuación con la anterior; $$e^u \cdot e^{iv} = |z|\, e^{i \arg z}$$

de donde resulta: $e^u = x\,|z|$

$$v = \arg z$$

Reemplazando los valores de u y v en la ecuación:

$$w = u + i\,v$$

obtenemos:

$$\log z = l\,n\,|z| + i(\arg z + 2\pi n)$$

Esta ecuación nos muestra que cada número tiene infinitos logaritmos. Demos a z el valor - 1 y obtenemos así:

$$\log(-1) = \pi i + 2\pi n\, i$$

INTEGRACION DE FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA:

Hemos tratado en el párrafo precedente la derivación de funciones de variable compleja; estudiaremos ahora su integración.

Consideremos la integral curvilínea:

$$I = \int (p\,dx + q\,dy)$$

a lo largo de la curva definida por la ecuación $f(x, y) = 0$, y siendo:

$$p = p(x, y) \qquad q = q(x, y)$$

Hemos estudiado que si se verifica la condición:

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$$

el valor de la integral, resulta independientemente del camino a lo largo del cual se efectúa la integración.

Apliquemos este concepto a las funciones de variable compleja.

Si disponemos de una cierta función; $f(z) = u + vi$, podemos definir la operación de integración por medio de la ecuación:

$$\int f(z)\, dz = \lim_{\Delta z \to 0} \Sigma f(z)\, \Delta z$$

o también;

$$\int_C f(z)\, dz = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Sigma (u + v\,i)(\Delta x + i \Delta y)$$

$$= \int_C (u + v\,i)\,(dx + i\,dy)$$

Desarrollando se obtiene:

$$\int_C f(z)\, dz = \int_C (u\,dx - v\,dy) + i \int_C (u\,dy + v\,dx)$$

pero según las fórmulas de Cauchy- Riemann, se verifica:

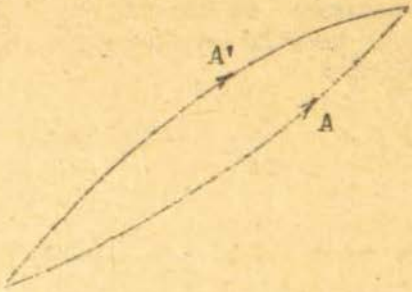
$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

lo que muestra que la integral compleja resulta independiente del camino.

Luego:

$$\int_A f(z)\, dz = \int_{A'} f(z)\, dz$$

Esta condición se verifica siempre que entre los circuitos considerados no exista ninguna singularidad de la función $f(z)$.



En todo circuito cerrado, que excluya puntos singulares de la función f(z), se verifica por tanto:

$$\int_{O} f(z)\, d\, z = 0$$ Teorema de Cauchy

Observemos un ejemplo:

Sea; $I = \int_{(r)} z^m \, d\, z$ = Integral a lo largo de una circunferencia de radio r.

Escribimos: $z = r\, e^{i\theta}$

$$dz = ri\, e^{i\theta}\, d\theta = iz\, d\theta$$

La integral queda con esta transformación:

$$I = i r^{m+1} \int_0^{2\pi} e^{(m+1)i\theta} d\theta$$

o sea; $$I = i \left. \frac{e^{(m+1)i\theta}}{(m+1)i} \right|_0^{2\pi} = \frac{r^{m+1}}{m+1} (1 - 1) = 0$$ (para $m \neq -1$)

Si $m = -1$

$$I = i\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i$$

o sea; $$\int \frac{dz}{z} = 2\pi i \neq 0$$

lo que no debe sorprendernos ya que $z = 0$ es un punto singular.

Generalizando esta propiedad, podemos escribir, cambiando z por $(z - a)$:

$$\int \frac{d z}{z - a} = 2\pi i$$

La singularidad se produce ahora para $z = a$, y si este punto queda comprendido en el circuito de integración, nuestra integral vale según lo visto; $2\pi i$

Si $z = a$ queda excluido del circuito, se verifica:

$$\int_a \frac{d z}{z - a} = 0$$

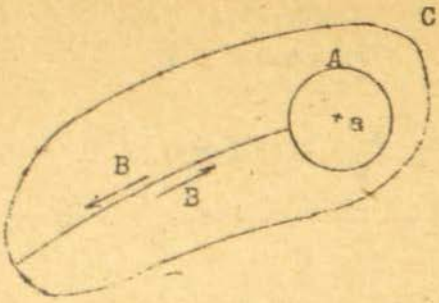
Estas propiedades pueden hacerse extensivas a la integración de funciones a lo largo de curvas cualesquiera, como lo veremos en seguida.

Escribamos;

$$\int_C \frac{dz}{z-a} = \int_{B\ A-B} \frac{dz}{z-a} = \int_A \frac{dz}{z-a} = 2\pi i$$

Resumiendo:

$$\int \frac{1}{2\pi i} \frac{dz}{z-a} = \begin{cases} 0 & \text{Cuando } a \text{ está fuera del circuito} \\ 1 & \text{Cuando } a \text{ está adentro.} \end{cases}$$



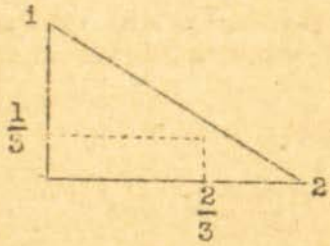
o bien lo podemos poner:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint \frac{dz}{z-a} = n$$

siendo n el número de vueltas en torno de a;

Ejemplo:

Calcular la integral, a lo largo del contorno triangular:



$$\oint \frac{1-z}{3z^2-2-1}\,dz$$

Observamos que el denominador se anula para:

$$z = \frac{2}{2} + \frac{1}{3}$$

o sea el contorno triangular incluye en este caso una singularidad de la función subintegral. La integral es entonces diferente de cero;

calcularemos su valor, escribiendo:

$$\int \frac{1-z}{3z-2-i}dz = \frac{1}{9}\int \frac{1-1}{\left(z-\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right)}dz - \frac{1}{3}\int dz$$

La segunda integral es nula, ya que su función sub-integral no tiene singularidad alguna en el circuito que consideremos. Queda por tanto:

$$\int \frac{1-z}{3z-2-i}dz = \frac{1-1}{9}\cdot 2\pi i = \frac{2\pi}{9}(1+i)$$

FORMULAS INTEGRALES DE CAUCHY:

Si deseamos calcular la integral:

$$\int \frac{f(z)}{z-a}dz$$

siendo f(z) una función regular, podemos poner:

$$f(z) = f(a) + f(z) - f(a)$$

con lo cual la integral queda:

$$\int \frac{f(z)}{z-a}dz = f(a)\int \frac{dz}{z-a} + \int \frac{f(z)-f(a)}{z-a}dz$$

La primera integral, según sabemos vale: $2\pi i$ y si llamamos I a la segunda, podemos escribir que:

$$\left|\frac{f(z)-f(a)}{z-a} - f'(a)\right| < \varepsilon$$

cuando ε es pequeño, e integrando a lo largo de la circunferencia de radio δ, obtenemos:

$$\left| I - \int f'(a)\, dz \right| < \varepsilon - 2\pi\delta$$

pero: $$\int f'(a)\, dz = f'(a) \int dz = 0$$

o sea; $$\left| I - 0 \right| < 2\pi\delta\varepsilon$$

que tiende hacia cero cuando ε tiende hacia cero; por ésto, también I tiende hacia cero, con lo cual nuestra integral queda;

$$\int \frac{f(z)}{z - a}\, dz = 2\pi i\, f(a) \qquad (*)$$

Diferenciando esta ecuación con respecto a a obtenemos;

$$1! \int \frac{f(z)}{(z-a)^2}\, dz = 2\pi i\, f'(a)$$

$$2! \int \frac{f(z)}{(z-a)^3}\, dz = 2\pi i\, f''(a)$$

. . . . . .

$$n! \int \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\, dz = 2\pi i\, f^{(n)}(a)$$

que se conocen con el nombre de fórmulas integrales de Cauchy.

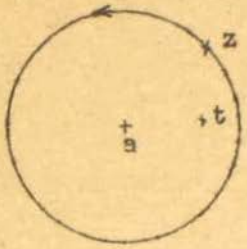
DESARROLLO DE TAYLOR;

Sea f(t) una función analítica en una cierta región. Supongamos;

$$\left| t - a \right| < \left| z - a \right|$$

y sea;

$$q = \frac{t - a}{z - a} \qquad \left| q \right| < 1$$



Según las relaciones estudiadas, se tiene:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(z)}{z - t}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(z)}{(z - a) - (t - a)}\,dz$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(z)}{(z - a)(1 - q)}\,dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(z)}{z - a}(1 + q + q^2 + q^3 + \ldots)\,dz$$

que se puede escribir:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\int \frac{f(z)}{z - a}\cdot\frac{(t - a)^n}{(z - a)^n}\,dz$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}(t - a)^n\int \frac{f(z)}{(z - a)^{n+1}}\,dz$$

y según las fórmulas integrales de Cauchy, deducidas en el párrafo anterior:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(t - a)^n$$

que expresa el desarrollo de Taylor para la función f(t).

INTEGRACION DE FRACCIONES ALGEBRAICAS, POR MEDIO DE VARIABLE COMPLEJA.

Deduciremos una fórmula que nos permita calcular integrales de la forma:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx$$

en que P(x) y Q(x), son polinomios de grados m y n, respectivamente.

No es posible, desde luego, que m $\geq$ n, pues $\frac{P(x)}{Q(x)}$ no tendería a cero cuando $x \to \pm \infty$

Tampoco puede ser n m 1 pues en tal caso se tendría::

$$x\frac{P(x)}{Q(x)} = x \cdot \frac{a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \ldots}{b_m x^{m-1} + b_{m-1} x^m + \ldots}$$

o sea $$x \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_m + a_{m-1} x^{-1} + \ldots}{b_m + b_{m-1} x^{-1} + \ldots}$$

expresión que tendería hacia el valor $\frac{a_m}{b_m}$ cuando $x \to \pm \infty$

Esto significaría que $\frac{P(x)}{Q(x)}$ se portaría para valores grandes de x, como la función:

$$\frac{a_m}{b_m x}$$

y la integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x}$$

es divergente.

Sea pues, $n \geq m+2$ lo que garantiza la convergencia, siempre que $Q(x)$ no se anule para valores reales de la variable x.

Así $Q(x)$ tendrá sólo raíces complejas; sabemos que si una ecuación real, admite como raíz un número complejo, admite también su conjugado. De estas consideraciones, se deduce que el grado de $Q(x)$ deberá ser un número par.

Sean: $z_1\ z_2 \ldots\ z_k$ las raíces de la ecuación:

$$Q(z) = 0$$

que están en el semi-plano superior, es decir aquellas cuya parte imaginaria es positiva.

Avaluemos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(z)}{Q(z)}\, dz$$

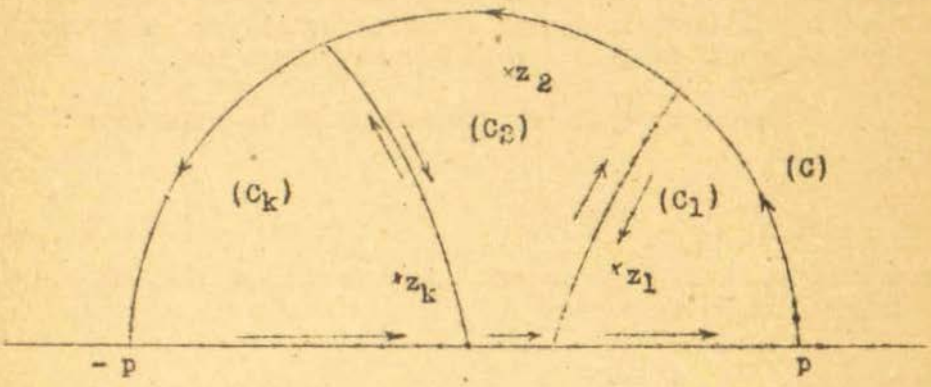
Para ésto, hagamos:

$$I_p = \int_{-p}^{p} \frac{P(z)}{Q(z)}\, dz$$

$$\lim_{p \to \infty} I_p = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(z)}{Q(z)}\, dz$$

Para calcular I_p, integremos a lo largo de las curvas que indicamos en el gráfico, de modo que dentro de

cada una de las zonas determinadas por estas curvas, queda una singularidad de la integral. (Raíces de $Q(z) = 0$).



Luego:

$$Ip = \int_{-p}^{p} \frac{P(z)}{Q(z)}\, dz = \int_{C_1} \frac{P(z)}{Q(z)}\, dz + \int_{C_2} \frac{P(z)}{Q(z)}\, dz + \dots +$$

$$+ \dots + \int_{C_k} \frac{P(z)}{A(z)}\, dz - \int_{C} \frac{P(z)}{Q(z)}\, dz$$

Calculemos primeramente la integral a lo largo de la semi-circunferencia (C):

Escribimos :

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{a_m z^m + \dots}{b_n z^n + \dots} = z^{m-n} \frac{a_m + \dots}{b_n + \dots}$$

o bien: $$\left| \frac{P(z)}{Q(z)} \right| < k \frac{a_m}{b_n} \cdot \frac{1}{z^{n-m}} \leq \frac{k'}{|z|^2}$$

ya que el mínimo valor de n - m es 2, y como: $|z| = p$

$$\left| \frac{F(z)}{Q(z)} \right| < \frac{k'}{p^2}$$

Integrando a lo largo de (C), se obtiene:

$$\left| \int_C \frac{P(z)}{Q(z)} dz \right| < \frac{k'}{p^2} \cdot \pi p = \frac{k'\pi}{p}$$

Ahora bien si hacemos que $p \to \infty$, tendremos que :

$$\left| \int_C \frac{P(z)}{Q(z)} dz \right| \to 0$$

Debemos calcular por último:

$$\int_{C_k} \frac{P(z)}{Q(z)} dz$$

para lo cual escribimos:

$$\int_{C_k} \frac{P(z)}{Q(z)} dz = \int_{C_k} \frac{P(z) \cdot (z - z_k)}{Q(z)} \cdot \frac{dz}{z - z_k}$$

Ahora bien, la fracción :

$$\frac{P(z) \cdot (z - z_k)}{Q(z)}$$

puede escribirse:

$$\frac{\frac{P(z)}{Q(z)}}{z - z_k}$$

y teniendo en cuenta que cuando $z \longrightarrow z_k$,

$$\frac{Q(z)}{z - z_k} = \frac{Q(z) - Q(z_k)}{z - z_k} \longrightarrow Q'(z_k)$$

se deduce que:

$$\int_{C_k} \frac{P(z)}{Q(z)} dz \longrightarrow 2\pi i \frac{P(z_k)}{Q'(z_k)}$$

Dando a k los valores; k = 1, 2, ... y reemplazando en el valor de I_p, obtenemos finalmente;

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(z)}{Q(z)} dz = 2\pi i \left[\frac{P(z_1)}{Q'(z_1)} + \frac{P(z_2)}{Q'(z_2)} + \ldots + \frac{P(z_k)}{Q'(z_k)} \right]$$

Este resultado es de mucha utilidad en el cálculo de integrales definidas. En el capítulo correspondiente a esta materia, haremos una aplicación de esta fórmula.

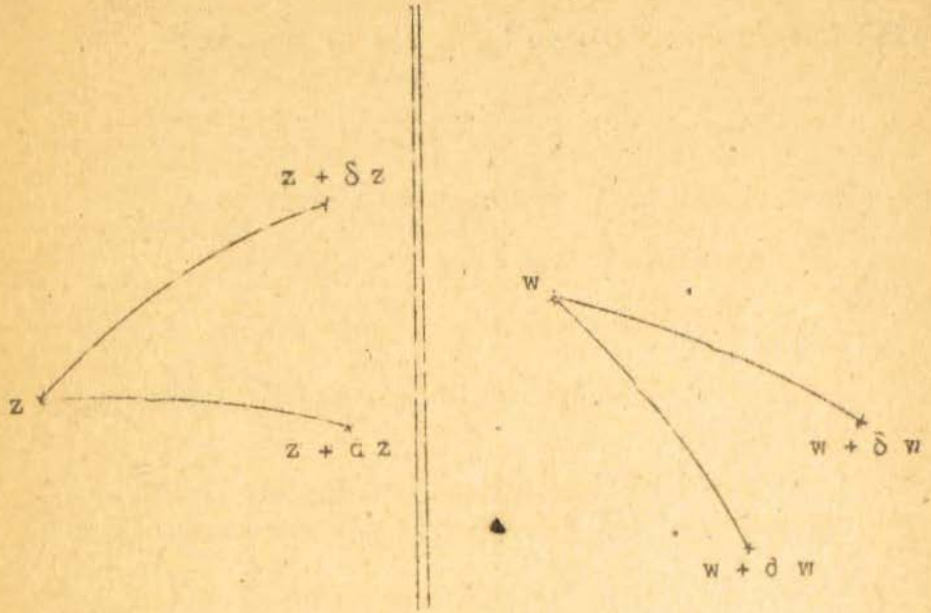
REPRESENTACION CONFORME:

Sea; $$\frac{dw}{dz} = A e^{i\alpha}$$

y supongamos: $$\frac{dw}{dz} \neq 0$$

para que el ángulo α quede determinado.

Sean tres puntos del plano complejo: z; z + dz; $z+\delta z$ y los correspondientes del plano w.



Tenemos que:

$$\frac{d w}{d z} = A\, e^{i\alpha} = \frac{\delta w}{\delta z}$$

$$d w = A\, e^{i\alpha} d z \qquad (1)$$

Luego: $$|d w| = A\, |d z| \qquad (2)$$

Además: $$\arg d w = \alpha + \arg d z \qquad (2)$$

ya que $$\arg d w - \arg d z = \arg \frac{d w}{d z} = \alpha$$

Asimismo se verfica que;

$$|\delta w| = A\,|\delta z| \qquad (3)$$

y

$$\arg \delta w = \alpha + \arg\ \delta z \qquad (4)$$

dividiendo miembro a miembro (1) y (3) se obtiene;

$$\frac{|d w|}{|\delta w|} = \frac{|d z|}{|\delta z|}$$

(semejanza infinitesimal. Representación conforme).

Restando (3) de (2);

$$\arg d w - \arg \delta w = \arg d\ z - \arg \delta z$$

Esto es lo que se llama representación isogonal.

O sea figuras infinitesimales en el plano z y w son semejantes y los ángulos se conservan siempre que

$$\frac{d w}{d z} \neq 0$$

Ejemplos:

1) La función $w = z^2$

constituye una representación conforme fuera del punto $z = 0$ con su imagen $w = 0$ ya que vimos que su derivada era:

$$w' = 2 z$$

que es distinta de cero para $z \neq 0$.

2) La función

$$w = \frac{a z + b}{c z + d}$$

siendo, según lo visto anteriormente

$$w = \frac{a\,d - b\,c}{(c\,z + d)^2} \neq 0$$

dá una representación conforme de todo el plano z sobre todo el plano w.

- oOo -

I N D I C E

Prólogo..... 1
Prefacio..... 3
MÉTODOS Y REGLAS DE CÁLCULO NUMÉRICO.- 5
Operaciones con números cercanos a la unidad..... 6
Escritura de datos obtenidos en experiencias..... 8
Precisión en las operaciones con cantidades numéricas..... 8
Obtención rápida de resultados..... 11
Operaciones abreviadas..... 12
Complemento a un número..... 16
ESCALAS FUNCIONALES-REGLA DE CÁLCULO.- 19
Representación de una función por una escala..... 19
Escalas fijas..... 20
Escalas desplazables..... 21
Regla de cálculo..... 24
División..... 26
Resolución de ecuaciones algebraicas con regla de cálculo..... 31
ESTADÍSTICA MATEMÁTICA.- 41
Frecuencia..... 44
Formación de grupos..... 45
Dispersión..... 48
Gráficos estadísticos..... 52
Caso de dos variables..... 56
Variable X..... 58
Correlación..... 61

Pág.

Exactitud del medio aritmético..... 65
ESTUDIO DE LA FUNCION.- 69
Generalidades..... 69
Estudio numérico de las propiedades de una función 69
Derivación numérica..... 74
Interpolación..... 76
Integración numérica..... 89
Fórmula del quinceavo..... 94
Determinación de funciones..... 97
Casos en que hay que corregir la tabla de valores. 109
Procedimiento general..... 111
DETERMINACION DE CONSTANTES.- 113
Aproximaciones sucesivas..... 114
Caso en que el número de condiciones es igual al número de constantes..... 117
Caso en que el número de condiciones es mayor que el número de constantes..... 121
SERIES NUMERICAS.- 135
NOMOGRAFIAS O ABACOS.- 153
Abacos por puntos alineados..... 153
Abacos logaritmicos. Tipo B:..... 164

SEGUNDA PARTE

ESTUDIOS FUNCIONALES.- 176
Series de Fourier..... 176
Valor del desarrollo para puntos discontinuos del intervarlo..... 180
Funciones pares e impares..... 181
Representación de una poligonal en serie de Fourier 195
Aplicación..... 200
Extensión del intervalo del desarrollo de Fourier 202
Aplicación..... 206
Desarrollo finito de Fourier..... 207
Extensión del intervalo del desarrollo de Fourier 209
Avaluación del error..... 213
Aplicación..... 215

Pág.

FUNCIONES ORTOGONALES.- 221
Vectores unitarios y ortogonales..... 221
Ortogonalidad de funciones..... 224
Desarrollo con funciones unitarias y ortogonales 233
Aproximación en el desarrollo con funciones unitarias y ortogonales..... 241
FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA.- 245
Números complejos..... 245
Lugares geométricos de números complejos..... 246
Funciones de variable compleja..... 249
Funciones analíticas..... 261
Condición de derivabilidad..... 263
Integración de funciones de variable compleja... 270
Fórmulas integrales de Cauchy..... 275
Desarrollo de Taylor..... 276
Integración de fracciones algebraicas por medio de variable compleja..... 278
Representación conforme..... 282

--o--