Edw B. Budge
1919. Valparaiso.

COORDENADAS JEOGRAFICAS

DE

ALGUNAS CIUDADES DE CHILE

ANALES

DEL

OBSERVATORIO NACIONAL DE SANTIAGO

(ESTRACTO)

COORDENADAS JEOGRAFICAS

DE

ALGUNAS CIUDADES DE CHILE

Por A. Obrecht,
Director del Observatorio,

CON LA

COLABORACION DE LOS SS. DEVAUX I LAGARDE

SANTIAGO DE CHILE
IMPRENTA NACIONAL, CALLE DE LA MONEDA N.º 112

1890

INTRODUCCION

A fines del mes de junio de 1888, el Ministerio de Obras Públicas se dirijió al director del Observatorio de Santiago para que hiciera determinar las coordenadas jeográficas de Copiapó i Caldera.

Un injeniero distinguido, el señor Francisco San Roman, habia hecho trabajos jeodésicos en la provincia de Atacama i el Ministerio de Obras Públicas queria que se completaran i concluyeran esos trabajos, con la determinacion de la posicion de dos puntos importantes de la triangulacion del señor San Roman.

El director del Observatorio, señor José Ignacio Vergara, resolvió enviar en comision a esas dos ciudades al señor Alberto Obrecht, primer astrónomo del Observatorio, i al señor Irénée Lagarde, astrónomo auxiliar, con los instrumentos necesarios para hacer los trabajos pedidos.

Como se queria obtener las coordenadas con la mayor exactitud posible, se adoptó para la lonjitud el método del cambio eléctrico de la hora.

El señor Javier Devaux, segundo astrónomo, quedaba en Santiago con el encargo de hacer las observaciones i las comunicaciones correspondientes.

Se acordó igualmente hacer observaciones magnéticas.

Siendo bien determinados la clase de trabajo i los métodos que se debian usar, fué preciso ocuparse en reunir los instrumentos que se habia de llevar.

El material científico de la comision quedó compuesto de la manera siguiente:

1.° Un instrumento universal de Repsold;
2.° Un círculo de reflexion de Pistor i Martins, con su horizonte artificial;
3.° Una pequeña ecuatorial;
4.° Dos cronómetros de tiempo sideral de Parkinson i Frodsham.
5.° Un barómetro de Fortin,
6.° Un termómetro centígrado.
7.° Un magnetómetro de Meyerstein.

Todos estos instrumentos fueron examinados con cuidado. El instrumento universal fué particularmente estudiado. Se determinó el valor de las divisiones de sus niveles i la forma de los muñones del eje horizontal.

Copiapó i Caldera.—El 27 de junio la comision salió de Santiago. Durante el viaje, para mayor seguridad, todo fué arreglado de manera que siempre los instrumentos estuviesen con los astrónomos en los coches, o los camarotes del vapor.

El 2 de julio, desembarcó la comision en Caldera i el mismo dia llegaba a Copiapó. Inmediatamente se ocupó de la instalacion de un observatorio.

La base que habia usado el señor San Roman en sus trabajos jeodésicos habia sido medida a lo largo de uno de los rieles de la línea del ferrocarril de Copiapó a Caldera, cerca de la estacion de Copiapó. Importaba mucho establecer el observatorio cerca de una de las estremidades de esa base, para poder determinar las coordenadas jeográficas con exactitud. El señor Carlos Porter, uno de los colaboradores del señor San Roman, dió sobre esta base datos importantes, i, tomando en cuenta sus indicaciones, se resolvió hacer las observaciones al pié del cerro de Chanchoquin, a unos sesenta metros al norte de la estremidad de la base mas cerca de Copiapó.

En seguida se trataba de construir un pilar para instalar el instrumento universal que debia ser usado como anteojo i círculo meridianos. Como importaba mucho para la exactitud de los resultados que el instrumento quedase en una posicion invariable una vez colocado, era indispensable hacer un pilar invariable por su parte, i a fin de evitar las desnivelaciones que se producen siempre que entra una gran cantidad de mezcla en una construccion, se resolvió construir un pilar monólito.

El suelo sobre el cual debia levantarse era compuesto de roca pura, circunstancia mui favorable al objeto que se queria alcanzar. Pero dificultades imprevistas vinieron a retardar los trabajos durante cerca de un mes: no se encontraban piedras a propósito en los alrededores de Copiapó. En vano se buscó en Caldera i aun en las minas de Bordos, mas de sesenta kilómetros al interior del valle de Copiapó; no se pudo encontrar nada de conveniente. Fué preciso abandonar los primeros planos i hacer construir un pilar de ladrillos. Cuidando la construccion i usando materiales bien escojidos se podia esperar resultados satisfactorios.

Se niveló el suelo con una mezcla de cimiento romano i de piedrecitas. Sobre esta mezcla se construyó una basa que tenia una altura de 40 centímetros i por base un cuadrado de 90 centímetros de lado; i por fin, sobre la basa, un pilar de 1 metro 20 de altura i de 65 centímetros de lado. La basa i el pilar eran de ladrillos refractarios unidos con cimiento romano. Uno de los costados del pilar habia sido dirijido aproximadamente segun el meridiano.

Al norte i al sur del pilar i a una distancia de 1 metro 25 de su centro, se hizo construir, para sostener una plataforma de madera, dos pequeños muros, cuya lonjitud era de 2 metros 50 i cuya altura habia sido calculada de manera que la plataforma se hallase 1 metro mas abajo que la superficie superior del pilar. La plataforma se componia de un piso de madera cuadrado de 2 metros 50 de lado en cuyo centro habia una abertura igualmente cuadrada de 70 centímetros de lado por la cual pasaba el pilar, dejando algunos centímetros de espacio vacío entre los ladrillos i las tablas.

Como la plataforma no estaba puesta sino sobre los muros del norte i del sur que se encontraban bastante lejos del pilar, éste quedaba perfectamente aislado del observador que podia andar al rededor i acercarse sin temor de trasmitirle sus movimientos. Encima de la plataforma se estableció una carpa de forma cúbica a fin de protejer los instrumentos i a los observadores.

Se instalaron tambien los aparatos que debian ser usados para cambiar señales con Santiago. Una línea telegráfica que seguia la via del ferrocarril pasaba mui cerca del Observatorio; se estableció una derivacion hasta la carpa para unirla con la oficina de telégrafos de la ciudad. En el observatorio se colocaron pilas i un pequeño aparato telegráfico compuesto de un manipulador de Morse i de un electroiman con una armadura de fierro dulce que bastaba para recibir al oido.

Solo faltaba colocar el instrumento universal sobre el pilar para poder empezar las observaciones. Esto se hizo el 28 de julio.

La Estacion de Santiago se hallaba en el mismo Observatorio Astronómico; los instrumentos usados eran los siguientes:

1.° Un anteojo meridiano de Pistor i Martins.
2.° Un péndulo de tiempo sideral de Kessel.
3.° Un cronógrafo para recibir las señales.
4.° Un aparato de Morse para cambiar las señales i las comunicaciones necesarias.

Cuando todo estuvo listo para las observaciones, el señor Obrecht, que tenia la direccion jeneral de los trabajos, se dedicó particularmente a la determinacion de la lonjitud i dejó al señor Lagarde el cuidado de determinar la latitud.

Podia esperarse que pronto se llegaria a un resultado; pero no se habia contado con los azares de un invierno escepcional. Esos paises, donde llueve apénas dos o tres veces al año, fueron el teatro de malos tiempos sin precedentes, de inundaciones que cortaron la línea telegráfica varias veces i en varios lugares. El cielo tambien impidió las observaciones. Estuvo mui a menudo malo en Santiago i en Copiapó, i era difícil tener noches despejadas en las dos estaciones junto con una buena comunicacion telegráfica. Eso esplica por qué los primeros cambios de señales de algun valor no tuvieron lugar ántes del 25 de setiembre.

Pero el tiempo que habia trascurrido entre la época de la instalacion del Observatorio i esta última fecha no habia sido perdido. Se hicieron todos los trabajos que se podian ejecutar sin el telégrafo. El señor Lagarde se ocupó en determinar la latitud, con todo el cuidado posible i la precision que permitia el instrumento universal. Las primeras observaciones daban en los resultados diferencias inesplicables. El mal tiempo permitió buscar las causas de los errores i remediar los defectos del instrumento descubiertos en el curso de este trabajo.

El barómetro de Fortin que se había descompuesto durante el viaje, fué reemplazado por un barómetro holostérico que un distinguido injeniero de Copiapó, el señor Francisco Sayago, puso con mucha amabilidad a la disposicion de la Comision. Este barómetro, comparado por el señor Carvajal, rector del liceo de Copiapó con un barómetro de Fortin, instalado en la estacion meteorolójica de ese establecimiento, fué reconocido bastante exacto para ser usado en las observaciones de latitud.

Algunos injenieros de la ciudad habian pedido que se fijara la direccion del meridiano en el terreno. Al efecto se hizo construir en el meridiano del Observatorio, al lado sur i a media altura de un cerro distante unos 1500 metros, un pequeño muro de 1 metro cuadrado de superficie sobre el cual se trazó una cruz. Esta cruz, con el centro del pilar del Observatorio determinaba el meridiano, con una aproximacion de 3 o 4 segundos de arco.

Esta señal, hecha para satisfacer a los injenieros del pais, fué tambien mui útil para los trabajos de la Comision. Sirvió de mira fija para obtener el valor de la colimacion, de la distancia de los hilos de la retícula del instrumento universal con una gran exactitud, i dió la direccion del meridiano cuando se quiso determinar la declinacion magnética.

Una parte de las observaciones magnéticas fué hecha tambien ántes de las comunicaciones para la lonjitud. Se sacó el instrumento universal de la posicion que ocupaba sobre el pilar i se le reemplazó por un magnetómetro que sirvió para determinar la declinacion i la fuerza magnéticas.

Todavía no poseia la Comision una brújula de inclinacion.

La determinacion de la lonjitud comprendió tres noches de observaciones, durante las cuales se cambiaron señales con Santiago.

Jeneralmente las dos estaciones se ponian en comunicacion entre las 8 i las 9 P. M. Se observaban estrellas fundamentales ántes i despues para obtener la correccion del cronómetro i del péndulo en el momento exacto del cambio de señales.

Gracias a las órdenes dadas por el señor Cabrera, inspector de los telégrafos del Estado, los observadores, en cada estacion, tenian a su disposicion un empleado para enviar i recibir las comunicaciones que necesitaban. Los mismos observadores mandaban las señales que debian servir para determinar la lonjitud.

El 8 de octubre se cambiaron señales por última vez entre Copiapó i Santiago, se midió la distancia al pilar, de la estremidad de la base del señor San Roman i su azimut respeto del meridiano del Observatorio, a fin de deducir de estas operaciones sus coordenadas jeográficas, e inmediatamente despues la Comision se trasladó a Caldera, para principiar otra vez en aquel puerto los trabajos que acababan de concluirse en Copiapó.

Ya existía el pilar en Caldera. Miéntras el señor Obrecht vijilaba la construccion del de Copiapó, es decir a fines del mes de julio, el señor Lagarde habia hecho construir el de Caldera.

El lugar elejido para las observaciones estaba situado en un corral detras de la iglesia de la ciudad. El campanario de esa iglesia era un punto importante de la triangulacion del señor San Roman, i convenia naturalmente hacer las observaciones lo mas cerca posible.

El pilar de Caldera fué hecho poco mas o ménos como el de Copiapó, con los mismos materiales i dimensiones.

Sin embargo, no siendo bastante firme el suelo sobre el cual debia elevarse, se habia juzgado necesario hacer un hoyo de mas de un metro de hondura para buscar otro suelo mas adecuado. Pero el terreno encontrado no era todavía tan firme como se deseaba i entónces se hizo una primera basa de una sola piedra de 40 centímetros de altura i 1 metro de lado. El pilar i su basa de ladrillo enteramente semejante al de Copiapó se construyó sobre esa piedra.

La carpa que abrigaba los instrumentos habia sido mui perfeccionada. Como la Comision habia recibido instrucciones para seguir los trabajos en otras ciudades, despues de concluirlos en Caldera, se encargó a la casa de Jorje Berger de Copiapó una casucha de madera que pudiera desarmarse i empaquetarse fácilmente a fin de ser mas fácil de trasportar i que, al mismo tiempo, protejiera mejor que una carpa los objetos que debian encontrarse en ella.

La instalacion del Observatorio de Caldera solo duró un dia, i en doce dias se determinó la lonjitud, la latitud i la declinacion i fuerza magnéticas.

No se habia necesitado colocar aparatos telegráficos en el Observatorio: en el momento de las comunicaciones habia que ir con el cronómetro a la oficina del telégrafo de la ciudad que estaba mui cerca, i los cambios de señales se hacian con un aparato de Morse.

Dos noches bastaron para determinar la lonjitud.

Como en Copiapó, se hizo construir una señal para indicar la direccion del meridiano i se efectuaron las medidas necesarias para deducir de las coordenadas del pilar las del campanario de la iglesia.

Hemos dicho que el Gobierno habia resuelto hacer determinar las coordenadas jeográficas de algunas otras ciudades del norte. El señor Devaux fué mandado de Santiago con un cronógrafo i una brújula de inclinacion que hacian falta en el material científico de la Comision i con un barómetro de Fortin para reemplazar al que se habia descompuesto durante el viaje.

Se quiso aprovechar la presencia del señor Devaux para determinar la diferencia de lonjitud entre Copiapó i Caldera i averiguar los resultados obtenidos hasta entonces. Pero como la Comision solo poseia un instrumento de pasos, fue preciso buscar un medio de hacer lo que se habia acordado usando el mismo instrumento en las dos estaciones. Las operaciones debian ser ejecutadas conforme al programa siguiente:

El instrumento universal estando instalado en Copiapó, se determinaria en primer lugar la correccion de los dos cronómetros; despues, miéntras el señor Obrecht quedaba en Copiapó con ese cronómetro i el cronógrafo, los señores Devaux i Lagarde irian a Caldera con el instrumento universal i el otro cronómetro a determinar la hora; harian en seguida cambios de señales con el señor Obrecht i volverian inmediatamente a Copiapó con el instrumento universal para determinar, por medio de observaciones, la marcha del cronómetro del señor Obrecht desde el momento en que se habia obtenido su correccion.

Se esperaba que, obrando rápidamente, el cronómetro de Copiapó habria andado con bastante regularidad para dar la hora con una exactitud suficiente. Por desgracia, el mal tiempo en Caldera no permitió realizar lo que se pensaba; fué preciso esperar varios dias antes de poder observar, i, cuando se pudo comunicar, el tiempo trascurrido desde la determinacion de la hora en Copiapó era demasiado grande para que se pudiera tener confianza en los resultados.

Los señores Obrecht i Devaux habian aprovechado la instalacion del instrumento universal en Copiapó para estudiar su ecuacion personal. Obtuvieron resultados mui satisfactorios; pero, como el señor Devaux observaba con un instrumento distinto del que usaba en Santiago esos resultados no podian ser tomados en cuenta i se resolvió esperar la vuelta de la Comision a Santiago, para determinar la ecuacion personal de los observadores, en condiciones iguales, en lo posible, a las condiciones en que se habian hecho las observaciones relativas a las lonjitudes.

Antes de salir de Copiapó i de Caldera se determinó el valor de la inclinacion magnética en esas dos ciudades con la brújula que acababa de agregarse al material científico de la Comision.

Antofagasta.—Salida de Caldera el 24 de noviembre, la Comision desembarcó al dia siguiente en Antofagasta. Desde el primer dia se ocuparon los señores astrónomos de la instalacion de un Observatorio. La estacion del ferrocarril, que tenia la ventaja de estar cerca de la oficina del telégrafo, i que ademas ofrecia un recinto cerrado i vijilado, pareció el lugar mas a propósito, i, ahí, con el permiso de la Compañía, se construyó un pilar del todo parecido a los de Copiapó i Caldera. El 4 de diciembre la casucha fué armada, el instrumento universal colocado en el pilar i todo estuvo listo para observar. Desgraciada mente el deshielo en la cordillera causó nuevas inundaciones en todo Chile. Lo que habia pasado en Copiapó se repitió, la línea telegráfica quedó mucho tiempo interrumpida, i, solamente el 16 de enero de 1889, fué posible cambiar las primeras señales con Santiago. La segunda comunicacion tuvo lugar el 19, i la tercera i última el 30 del mismo mes. Esta vez cada estacion poseia un cronógrafo, lo que debia aumentar la exactitud de los resultados.

El cronógrafo de Antofagasta habia sido instalado en la misma oficina del telégrafo, que estaba situado cerca del Observatorio.

Antes de los cambios de señales el señor Lagarde habia determinado la latitud i el señor Obrecht habia hecho las observaciones magnéticas.

Como en Copiapó i Caldera se quiso indicar la direccion del meridiano por medio de una señal, pero, no permitiendo la naturaleza del terreno poner la señal en el meridiano, fué preciso colocarla al este cerca del cementerio de la ciudad. Su azimut, contado desde el sur hácia el este, es igual, respecto al centro del pilar del Observatorio, a 89°15'13."4. Esta señal, parecida a las de Copiapó i Caldera, tuvo la misma utilidad, i ademas fué usada como pilar para hacer las observaciones magnéticas. El pilar del Observatorio, situado cerca de grandes masas de fierro, no podia servir para este trabajo, miéntras que la señal era construida en el campo léjos de todo lo que podia influenciar la aguja magnética.

La direccion del meridiano, necesaria para determinar la declinacion magnética, era dada por una cruz trazada sobre el pilar del Observatorio que podia verse de aquel punto.

Durante la estadia de la Comision en Antofagasta, el instrumento universal sufrió algunos accidentes que, aunque insignificantes en otra ocasion, tenian alguna importancia por la falta casi absoluta de medios de compostura.

A consecuencia de los fuertes calores del dia, sin duda, los niveles se destaparon i el éter se perdió. Despues de muchas tentativas sin resultado se pudo, por fortuna, llegar a componerlos. La dificultad consistia en pegar las tapas de vidrio con una sustancia insoluble en el éter. Una materia semejante no era fácil encontrar en Antofagasta, i, solamente despues de buscar mucho tiempo, se halló una cola especial conocida en el comercio bajo el nombre de «Syndetikon» i que pareció tener las cualidades necesarias.

Un hilo de la retícula se habia aflojado. Se consiguió colocarlo de nuevo en su lugar con algun trabajo, hecho mas difícil por el temor de romper los demas hilos, pero algunos dias despues se habia aflojado nuevamente i así tres veces. A la tercera vez se rompió i hubo que reemplazarlo. No se encontró nada mejor que un hilo de seda sacado de un cordon deshilado. Puesto en lugar del que faltaba, con útiles sencillísimos i con los cuidados mas minuciosos para evitar un nuevo accidente, se pudo ver con satisfaccion que no era mui diferente de los demas hilos i que la exactitud de las observaciones no se alteraria con la sustitucion.

La Serena.—Al salir de Antofagasta la Comision debia ir a la Serena, pero el señor Obrecht se detuvo en Caldera a fin de volver a hacer observaciones magnéticas en esa ciudad i en Copiapó.

El señor Lagarde siguió viaje hasta la Serena con la mayor parte de los instrumentos.

Los resultados de las primeras observaciones magnéticas habian dado entre Copiapó i Caldera diferencias mayores de las que se debia esperar para dos puntos tan cercanos. El señor Obrecht hizo las nuevas observaciones con un cuidado especial; en cada una de las dos ciudades las hizo dos veces; una vez con el instrumento colocado sobre el pilar que habia servido para el observatorio i otra vez sobre la señal que fijaba el meridiano. Los resultados fueron poco mas o ménos iguales i el señor Obrecht pudo deducir de ese hecho que las diferencias que hai entre los resultados de Copiapó i los de Caldera, deben tener su causa en la constitucion del suelo de aquellos paises mineros.

En la Serena el señor Lagarde se ocupó en buscar un lugar adecuado para establecer un observatorio, hizo las dilijencias necesarias para obtener del señor Intendente de la provincia el auxilio i los medios necesarios, i, cuando el señor Obrecht llegó, el 20 de febrero, se decidió establecerse en el liceo en el cual el señor Formas, profesor de astronomía, habia principiado la instalacion de un observatorio. El señor Formas, cuya amabilidad la Comision no podrá nunca agradecer bastante, ofreció su observatorio i sus servicios. Gracias a él no se necesitó construir un pilar; el instrumento universal fué instalado sobre uno de los pilares construidos desde tres años en el liceo.

La oficina del telégrafo se encontraba demasiado léjos para hacer los cambios de señales de allí mismo; fué necesario tender un alambre hasta el liceo i de esta manera el cronógrafo se halló al lado del instrumento universal.

Las comunicaciones con Santiago se hicieron los dias 5, 6 i 8 de marzo.

La Comision permaneció en la Serena hasta el 18 de marzo para determinar la latitud i hacer las observaciones magnéticas.

Como desde el Observatorio no se divisaba ningun punto conveniente para colocar una señal que fijara la direccion del meridiano, se habia trazado una cruz provisional sobre una pared arruinada en la punta del cerro de Santa Lucía, solamente para las necesidades de las observaciones de la Comision.

Coquimbo.—Gracias a la proximidad de la Serena i de Coquimbo, se habia mandado construir un pilar en esta última ciudad miéntras se observaba en la primera. Ese pilar, a diferencia de los precedentes, se componia de tres o cuatro piedras, las unas encima de las otras i canteadas de una manera conveniente. El cronógrafo fué instalado en la oficina del telégrafo.

Dos noches de comunicacion bastaron para determinar la lonjitud, las otras observaciones se hicieron como en las estaciones precedentes, i a mediados del mes de marzo todo quedó concluido.

No se habia puesto señal ninguna para determinar el meridiano a causa de las dificultades que presentaba el terreno; solo se habia trazado una cruz sobre una roca situada en la cima de los cerros que se elevan detras de la poblacion. Eso habia bastado para facilitar los trabajos de la Comision.

De Coquimbo la Comision debia ir a Ovalle, pero la línea del ferrocarril de Ovalle, interrumpida a consecuencia de las últimas inundaciones, no se habia restablecido todavía, i era de temer que el mal estado de los caminos hiciese peligroso el trasporte de los instrumentos. Un viaje que los señores Obrecht i Lagarde hicieron a Ovalle confirmó aquellas suposiciones, i, como por otra parte, los malos tiempos del invierno se acercaban, se resolvió volver a Santiago.

La Comision se halló de nuevo en su punto de partida el 19 de abril de 1889, cerca de diez meses despues de la salida.

En resúmen, habia visitado cinco ciudades: Copiapó, Caldera, Antofagasta, la Serena i Coquimbo, i en cada una de ellas habia determinado la lonjitud i la latitud jeográficas i la declinacion, inclinacion i fuerza magnéticas.

Para completar estos trabajos, los señores Obrecht i Devaux determinaron en Santiago su ecuacion personal, i el señor Lagarde determinó la latitud para compararla con el valor hallado por Moesta i asegurarse de este modo de que ningun error instrumental notable e imprevisto habia afectado los resultados de las observaciones hechas en las provincias.

INDICE

PRIMERA PARTE

SEGUNDA PARTE

ERRATAS PRINCIPALES

PÁJINA	LÍNEA		DICE	LÉASE
3	5	de abajo hácia arriba	EX	$Z'X$
142	16	de arriba hácia abajo	sen ρ	sen β
156	8	id. id.	$\alpha = \frac{\mathrm{T}}{\mathrm{T}}$	$\alpha = \frac{\mathrm{T}}{T}$
156	10	id. id.	$\delta\tau = 0$	$\delta T - 0$

TEORIA

DE LA

Representacion conforme de los puntos

DE LA TIERRA SOBRE UN PLANO

POR

A. OBRECHT

SANTIAGO DE CHILE

TALLERES DEL ESTADO MAYOR JENERAL

1914

TEORÍA
de la representacion conforme de los puntos
DE LA TIERRA SOBRE UN PLANO

POR

A. Obrecht

Se dice que un sistema de representacion es *conforme* cuando los ángulos que forman las direcciones sobre la superficie de la Tierra están representados exactamente en el mapa.

Es fácil comprender que no puede existir ningun mapa que represente exactamente las figuras trazadas sobre la superficie de la Tierra, ya que es imposible desarrollar una superficie esferoidal sobre un plano. Sin embargo, el estudio analítico del problema demuestra que una infinidad de sistemas tienen la propiedad de representar exactamente los ángulos.

Los mas usuales son los de *Mercator* i de *Gauss:* el primero se emplea en las cartas náuticas i el segundo en la mayor parte de los mapas terrestres.

Ecuaciones jenerales, comunes a todos los sistemas de representacion

Un punto cualquiera M de la superficie de la Tierra está definido por sus coordenadas jeográficas: latitud φ i lonjitud λ. El punto m que representa M en el mapa tiene ciertas coordenadas rectangulares x, y. Estas son funciones determinadas de φ, λ i la forma de las dos funciones caracteriza precisamente el sistema de representacion adoptado.

Para estudiar las deformaciones del sistema se concibe, sobre la superficie de la Tierra, una circunferencia de centro M i de radio infinitamente pequeño i se busca la curva representativa de la circunferencia en el mapa.

Sean M' un punto cualquiera de la circunferencia, $\varphi + d\varphi$ i $\lambda + d\lambda$ sus coordenadas jeográficas; m' el punto que representa M' en el mapa i $x + dx$, $y + dy$ las coordenadas rectangulares de m'.

Como x, y son funciones de φ, λ se tiene, de una manera jeneral,

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} dx &= \frac{dx}{d\varphi} d\varphi + \frac{dx}{d\lambda} d\lambda \\ dy &= \frac{dy}{d\varphi} d\varphi + \frac{dy}{d\lambda} d\lambda \end{aligned} \right.$$

Sean, por otra parte, ds la distancia MM'; A el azimut astronómico de ds, R el radio de curvatura del meridiano en M i N la gran normal. Las proyecciones de ds sobre el paralelo i el meridiano de M pueden espresarse de dos maneras distintas i se deducen así las relaciones

$$ds \cos A = R\, d\varphi$$

$$ds \operatorname{sen} A = N\, d\lambda \cos \varphi$$

Sean tambien $d\sigma$ la distancia mm' i ω el ángulo de mm' con OX; se tiene

$$dx = d\sigma \cos \omega$$

$$dy = d\sigma \operatorname{sen} \omega$$

Se deduce entónces de las ecuaciones (1)

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d\sigma}{ds}\cos\omega &= \frac{\cos A}{R}\,\frac{dx}{d\varphi} + \frac{\operatorname{sen} A}{N\cos\varphi}\,\frac{dx}{d\varphi} \\ \frac{d\sigma}{ds}\operatorname{sen}\omega &= \frac{\cos A}{R}\,\frac{dy}{d\varphi} + \frac{\operatorname{sen} A}{N\cos\varphi}\,\frac{dy}{d\lambda} \end{aligned}\right.$$

Se supone ahora que el punto M' describe una circunferencia alrededor de M. En esta hipótesis, la distancia $MM' = ds$ queda constante i el azimut A de MM' varia.

En los primeros miembros de (2) $d\sigma$ i ω representan las coordenadas polares de m' respecto de un sistema de ejes trazados por m paralelamente a los de coordenadas. Luego las ecuaciones (2) definen la curva descrita por m' alrededor de m.

Para simplificar la escritura se pone

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{1}{R}\,\frac{dx}{d\varphi} &= B \qquad & \frac{1}{N\cos\varphi}\,\frac{dx}{d\lambda} &= C \\ \frac{1}{R}\,\frac{dy}{d\varphi} &= D \qquad & \frac{1}{N\cos\varphi}\,\frac{dy}{d\lambda} &= E \end{aligned}\right.$$

Sea tambien

$$\xi = \frac{d\sigma}{ds}\cos\omega$$

$$\eta = \frac{d\sigma}{ds}\operatorname{sen}\omega$$

El punto de coordenadas ξ, η es homotético de m' respecto de m su lugar jeométrico satisface a las ecuaciones

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} \xi &= B\cos A + C\operatorname{sen} A \\ \eta &= D\cos A + E\operatorname{sen} A \end{aligned}\right.$$

De estas ecuaciones se deducen los valores de *sen* A i *cos* A para sustituirlos en la relacion

$$\operatorname{sen}^2 A + \cos^2 A = 1$$

i se obtiene así

$$\left(E\xi - C\eta\right)^2 + \left(D\xi - B\eta\right)^2 = \left(BE - DC\right)^2$$

Esta ecuacion representa una elipse referida a su centro. Luego, *cualquiera que sea el sistema de representacion, una circunferencia infinitamente pequeña descrita alrededor de un punto cualquiera M de la superficie de la Tierra está representada, en el mapa, por una elipse cuyo centro es el punto m del mapa que corresponde a M*

Sistemas conformes

En los sistemas conformes, cada radio vector mm' de la curva representativa debe formar, con la tanjente, en m', a esta curva, el mismo ángulo recto que forma el radio MM' con la tanjente en M a la circunferencia. Luego la curva representativa debe ser tambien una circunferencia.

Para esto es necesario que se tenga

$$E^2 + D^2 = C^2 + B^2$$

$$EC + BD = 0$$

O bien

$$(5) \qquad \frac{B}{E} = \frac{-C}{D} = \pm 1$$

Para elejir convenientemente el signo del último miembro se pone

$$(6) \begin{cases} B = f \cos F \\ C = -f \operatorname{sen} F \end{cases}$$

Se tiene entónces

$$E = \pm f \cos F$$

$$D = \pm f \operatorname{sen} F$$

Luego, segun (4),

$$\xi = f \cos (A + F)$$

$$\eta = \pm f \operatorname{sen} (A + F)$$

O bien, si se reemplazan ξ, η por sus valores

$$\frac{d\sigma}{ds} \cos \omega = f \cos \left(A + F\right)$$

$$\frac{d\sigma}{ds} \operatorname{sen} \omega = \pm f \operatorname{sen} \left(A + F\right)$$

Si los ángulos ω i A se cuentan en el mismo sentido, como sucede precisamente en las aplicaciones, es preciso adoptar el signo $+$ en la segunda fórmula. Se tiene entónces, segun (5).

$$(7) \quad \begin{cases} B = E \\ -C = D \end{cases}$$

i las últimas ecuaciones dan simplemente

$$(8) \quad \begin{cases} \dfrac{d\sigma}{ds} = f \\ \omega = A + F \end{cases}$$

Como los valores de f, F definidos por (6), dependen unicamente, como B i C, de la posicion del punto M i no varian cuando M' jira al rededor de M, se deduce de (8) que la curva representativa en el mapa es una circunferencia i que la diferencia de dos orientaciones cualesquiera, en el mapa, es igual a la diferencia de los azimuts correspondientes sobre la superficie de la Tierra. Esto significa que los ángulos estan representados exactamente.

En resúmen, un sistema de representacion es conforme cuando las derivadas parciales de las coordenadas x, y de los puntos del mapa verifican las condiciones (7), o sea, al reemplazar B, C, D, E por sus valores (3),

$$
(a) \quad \begin{cases} \dfrac{1}{R} \dfrac{dx}{d\varphi} = \dfrac{1}{N \cos\varphi} \dfrac{dy}{d\lambda} \\[2ex] \dfrac{-1}{N \cos\varphi} \dfrac{dx}{d\lambda} = \dfrac{1}{R} \dfrac{dy}{d\lambda} \end{cases}
$$

Satisfechas estas condiciones se pone, segun (6),

$$
(b) \quad \begin{cases} f \cos F = \dfrac{1}{R} \dfrac{dx}{d\varphi} = \dfrac{1}{N \cos\varphi} \dfrac{dy}{d\lambda} \\[2ex] f \operatorname{sen} F = \dfrac{1}{R} \dfrac{dy}{d\varphi} = \dfrac{-1}{N \cos\varphi} \dfrac{dx}{d\lambda} \end{cases}
$$

i se tiene

$$
(c) \quad \begin{cases} \dfrac{d\varphi}{ds} = f \\[2ex] \omega = A + F \end{cases}
$$

El coeficiente f representa la reduccion de las distancias en el punto m del mapa i el ángulo F es la diferencia entre las orientaciones del mapa i los azimutes sobre la superficie de la Tierra.

En particular, si $A = o$, F es el ángulo que forma la direccion del meridiano astronómico, en m, con el eje OX. Este ángulo se llama *converjencia de los meridianos.*

Espresiones jenerales de las coordenadas en los mapas de representacion conforme

En estos mapas el eje OX representa un meridiano de la Tierra i este se elije como oríjen de las lonjitudes.

Por razon de simetría, dos puntos de la Tierra, simétricos respecto del meridiano oríjen, estan representados, en el mapa, por dos puntos simétricos respecto de OX; luego las abcisas x son funciones pares de λ i las ordenadas y funciones impares de la misma variable

Las relaciones que espresan x, y en funcion de φ, λ pueden desarrollarse en series ordenadas, segun las potencias de λ. En esta hipótesis el desarrollo de x debe contener sólo potencias pares de λ i el desarrollo de y, potencias impares.

Segun esto se puede escribir

$$
(9)\quad \left\{
\begin{aligned}
x &= \quad Q_0 + \frac{\lambda^2}{1.2} Q_2 + \frac{\lambda^4}{1.2.3.4} Q_4 + \cdots \\
y &= \lambda\, Q_1 + \frac{\lambda^3}{1.2.3} Q_3 + \cdots
\end{aligned}
\right.
$$

Los coeficientes Q son funciones de la latitud φ. Ahora los valores de x, y deben satisfacer a las condiciones (a); luego, si se representan las derivadas de las funciones Q por letras acentuadas, se obtiene

$$
\frac{1}{R}\left(Q'_0 + \frac{\lambda^2}{1.2} Q'_2 + \cdots \right) = \frac{1}{N \cos\varphi}\left(Q_1 + \frac{\lambda^2}{1.2} Q_3 + \cdots \right)
$$

$$
\frac{-1}{N \cos\varphi}\left(\lambda\, Q_2 + \frac{\lambda^3}{1.2.3} Q_4 + \cdots \right) = \frac{1}{R}\left(\lambda\, Q'_1 + \frac{\lambda^3}{1.2.3} Q'_3 + \cdots \right)
$$

Estas relaciones deben tener lugar cualquiera que sea el valor de λ; luego los coeficientes de las potencias iguales deben ser respectivamente iguales. Se deduce así

$$
(\mathrm{d})\quad \left\{
\begin{aligned}
Q_1 &= \frac{N \cos\varphi}{R} Q'_0 \qquad & Q_2 &= -\frac{N \cos\varphi}{R} Q'_1 \\
Q_3 &= \frac{N \cos\varphi}{R} Q'_2 \qquad & Q_4 &= -\frac{N \cos\varphi}{R} Q'_3 \\
&\vdots & &\vdots
\end{aligned}
\right.
$$

Estas relaciones demuestran que todas las funciones Q estan determinadas cuando se conoce una sola de ellas

Mapa de Mercator

Este sistema de representacion es el de las cartas náuticas : los meridianos son rectas paralelas i sus intervalos son los que se refieren al ecuador. En consecuencia, las ordenadas y de los puntos del mapa están definidas simplemente por la ecuacion.

$$y = a\,\lambda$$

a es el radio ecuatorial de la Tierra, reducido a la escala del mapa.

Si se compara este valor de y con la segunda fórmula (9) se deduce

$$Q_1 = a$$

Las relaciones *(d)* muestran entónces que todos los coeficientes Q, de índice mayor que *1*, son nulos i que el valor de Q_0 está definido por la ecuacion

$$a = \frac{N\cos\varphi}{R}\,Q'_0$$

Por otra parte, la primera ecuacion (9) se reduce a

$$x = Q_0$$

Luego

$$x = a\int \frac{R}{N}\,\frac{d\varphi}{\cos\varphi}$$

Sea ε el achatamiento de la Tierra. Cuando se desprecia ε^2 se tiene

$$R = a\left(1 + \varepsilon\,\overset{2}{sen}\,\varphi - 2\,\varepsilon\,\overset{2}{cos}\,\varphi\right)$$

$$N = a\left(1 + \varepsilon\,\overset{2}{sen}\,\varphi\right)$$

Luego al mismo órden de aproximacion,

$$\frac{R}{N} = 1 - 2\,\varepsilon\,\overset{2}{cos}\,\varphi$$

Se tiene, por consiguiente,

$$x = a \int d\varphi \left(\frac{1}{\cos\varphi} - 2\,\varepsilon \cos\varphi \right)$$

La integracion da

$$x = a\, L\, cotg \left(45^0 - \frac{\varphi}{2} \right) - 2\, a\, \varepsilon\, sen\, \varphi + Const.$$

La constante es nula si las abcisas x se cuentan a partir del ecuador.

En resúmen, las coordenadas rectangulares de un punto de latitud φ i de lonjitud λ son

$$x = a\, L\, cotg \left(45^0 - \frac{\varphi}{2} \right) - 2\, a\, \varepsilon\, sen\, \varphi$$

$$y = a\, \lambda$$

Los valores de x se cuentan a partir del ecuador.

Para estudiar las deformaciones se aplican las fórmulas (b) i se obtiene

$$f \cos F = \frac{1}{R} \frac{dx}{d\varphi} = \frac{1}{R}\, Q'_0 = \frac{a}{N \cos\varphi}$$

$$f\, sen\, F = \frac{1}{R} \frac{dy}{d\varphi} = 0$$

Luego

$$f = \frac{a}{N \cos\varphi}$$

$$F = 0$$

Las fórmulas (c) dan en seguida

$$\frac{d\sigma}{ds} = \frac{a}{N \cos\varphi}$$

$$\omega = A$$

Se ve que las distancias se amplifican, en el mapa, a medida que a latitud aumenta i que las orientaciones son iguales a los azimutes astronómicos.

Sistema conforme de Gauss

En este sistema, los puntos del mapa situados sobre el meridiano central tienen abcisas iguales a los arcos del meridiano correspondiente de la superficie de la Tierra.

En las ecuaciones (9) el valor de x se reduce a Q_0 cuando la lonjitud jeográfica λ es igual a cero; sea por consiguiente s_m el arco del meridiano central, contado a partir de un oríjen arbitrario hasta un punto de latitud φ, se tendrá

$$Q_0 = s_m$$

Conocido el valor de Q_0, las ecuaciones (d) permiten calcular las demas funciones Q.

La primera da

$$Q_1 = \frac{N \cos \varphi}{R} \frac{ds_m}{d\varphi} = N \cos \varphi$$

En seguida

$$Q_2 = -\frac{N \cos \varphi}{R} \frac{d(N \cos \varphi)}{d\varphi}$$

El producto $N \cos \varphi$ representa el radio del paralelo i se deduce de una figura jeométrica

$$d\left(N \cos \varphi\right) = -ds_m \operatorname{sen} \varphi$$

Luego

$$\frac{d(N \cos \varphi)}{d\varphi} = -R \operatorname{sen} \varphi$$

Se obtiene así

$$Q_2 = N \cos \varphi \operatorname{sen} \varphi$$

En seguida

$$Q_3 = \frac{N \cos \varphi}{R} \frac{d\,(N \cos \varphi \, sen \, \varphi)}{d\varphi}$$

$$= \frac{N \cos \varphi}{R} \left(N \cos^2 \varphi - R \, sen^2 \varphi \right)$$

O bien

$$Q_3 = N \cos \varphi \left(\cos 2 \varphi + \frac{N - R}{R} \cos^2 \varphi \right)$$

Se tiene ahora

$$N = a \left(1 + \varepsilon \, sen^2 \varphi \right)$$

$$R = a \left(1 + \varepsilon \, sen^2 \varphi - 2 \, \varepsilon \cos^2 \varphi \right)$$

Luego

$$\frac{N - R}{R} = 2 \, \varepsilon \cos^2 \varphi$$

En consecuencia

$$Q_3 = N \cos \varphi \left(\cos 2 \varphi + 2 \, \varepsilon \cos^4 \varphi \right)$$

El término en λ^4 de la primera ecuacion (9) es jeneralmente inapreciable en las aplicaciones i es suficiente calcular Q_4 sin tomar en cuenta el achatamiento. A esta órden de aproximacion se tiene

$$Q_4 = - \frac{N \cos \varphi}{R} \; Q'_3$$

$$= N \left(sen \, 2 \varphi + \frac{3}{4} \, sen \, 4 \, \varphi \right)$$

De estos resultados se deduce

$$(e)\begin{cases} x = s_m + \frac{N\lambda^2}{4} sen\,2\,\varphi + \frac{N\lambda^4}{24}\left(sen\,2\,\varphi + \frac{3}{4} sen\,4\,\varphi\right) + \ldots \\ y = N\lambda\,cos\,\varphi + \frac{N\lambda^3}{12}\left(cos\,\varphi + cos\,3\,\varphi + 4\,\varepsilon\,cos^5\varphi\right) + \ldots \end{cases}$$

Se comprueba directamente que las derivadas parciales de x, y satisfacen a las condiciones (a); por consiguiente, el sistema de representacion definido por las ecuaciones (e) es rigorosamente conforme.

Cálculos de las deformaciones

Para efectuar este cálculo se consideran las ecuaciones (b) i se reemplazan x, y por sus valores (e); se obtiene así

$$f\,cos\,F = 1 + \frac{\lambda^2}{2}\left(cos\,2\,\varphi + 2\,\varepsilon\,cos^4\varphi\right) + \ldots$$

$$f\,sen\,F = -\lambda\,sen\,\varphi - \frac{\lambda^3}{12}\left(sen\,\varphi + 3\,sen\,3\,\varphi\right) + \ldots$$

Los términos no escritos son del órden de λ^4. Se deduce, al mismo órden de aproximacion,

$$f = 1 + \frac{\lambda^2}{2}\left(cos^2\varphi + 2\,\varepsilon\,cos^4\varphi\right) + \ldots$$

O bien, segun (e),

$$f = 1 + \frac{y^2}{2\,N^2}\left(1 + 2\,\varepsilon\,cos^2\varphi\right) + \ldots = 1 + \frac{y^2}{2\,N\,R} +$$

En seguida

$$F = -\lambda\, sen\, \varphi - \frac{\lambda^3}{3}\, sen\, \varphi\, cos^2\, \varphi + \ldots$$

Por consiguiente, segun (c),

$$\text{(f)} \quad \begin{cases} \dfrac{d\sigma}{ds} = 1 + \dfrac{y^2}{2\,N\,R} + \ldots \\[2ex] \omega = A - \lambda\, sen\, \varphi - \dfrac{\lambda^3}{3}\, sen\, \varphi\, cos^2\, \varphi + \ldots \end{cases}$$

Estas fórmulas definen las deformaciones del mapa.

La primera demuestra que las distancias se amplifican a medida que el punto representado se aleja del meridiano central; *la amplificacion es del órden de 1 en 100.000 a 30 kilómetros del meridiano central, de 1 en 10.000 a 90 kilómetros i de 1 en 1.000 a 300 kilómetros del mismo meridiano.*

La segunda fórmula (f) da la diferencia entre las orientaciones i los azimutes astronómicos i define, por lo tanto, la *converjencia de los meridianos.*

Representacion de las líneas jeodésicas en el mapa

Se demuestra que, en todos los puntos de una línea jeodésica trazada sobre una superficie de revolucion cualquiera, el producto del radio del paralelo por el seno del azimut, conserva un valor constante. Segun esto, una línea jeodésica de la supercie de la Tierra está definida por la ecuacion

$$N\, cos\, \varphi\, sen\, A = C^{te}$$

Se deduce de ella

$$N\, cos\, \varphi\, cos\, A\, d\, A + sen\, A\, d\, (N\, cos\, \varphi) = 0$$

Por otra parte,

$$d\,(N \cos \varphi) = -\,ds_m \operatorname{sen} \varphi = -\,ds \cos A \operatorname{sen} \varphi$$

Luego

$$N \cos \varphi \, dA = ds \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} A = N \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi \, d\lambda$$

O simplemente

$$dA = d\lambda \operatorname{sen} \varphi$$

De la segunda ecuacion (f) se deduce, en seguida,

$$d\omega = dA - d\lambda \operatorname{sen} \varphi - \lambda \cos \varphi \, d\varphi - \lambda^2 d\lambda \operatorname{sen} \varphi \cos^2 \varphi + \ldots$$

Luego, si se reemplaza dA por su valor,

$$d\omega = -\,\lambda \cos \varphi \, d\varphi - \lambda^2 d\lambda \operatorname{sen} \varphi \cos^2 \varphi + \ldots$$

En consecuencia,

$$\frac{d\omega}{ds} = -\,\lambda \cos \varphi \frac{\cos A}{R} - \lambda^2 \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi \frac{\operatorname{sen} A}{N} + \ldots$$

O bien, si se reemplaza A por su valor en funcion de ω, segun (b),

$$\frac{d\omega}{ds} = -\,\lambda \cos \varphi \frac{\cos \omega}{R} + \lambda^2 \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{N}\right) \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi \operatorname{sen} \omega + \ldots$$

El término en λ^2 es inapreciable en la práctica; por otra parte, se puede reemplazar $\lambda \cos \varphi$ por su valor deducido de (e) i se obtiene así

$$\text{(g)} \quad \left\{ \frac{d\omega}{ds} = -\,\frac{y}{NR} \cos \omega \right.$$

Se deduce de esta ecuacion que la curvatura de la curva representativa de una línea jeodésica, en el mapa, es máxima en la direccion del meridiano central i nula en la direccion perpendicular.

Sin embargo, la curvatura total de un arco de cien kilómetros de largo situado a cien kilómetros del meridiano central, llega sólo a unos 50 segundos.

Diferencias entre las coordenadas de los estremos de una visual jeodésica

Sean M, M' los dos estremos de una visual jeodésica; se demuestra que la tanjente, en M, a la línea jeodésica que une M con M' coincide prácticamente con el plano definido por la vertical de M, i el punto M'; luego esta tanjente tiene la direccion de la visual jeodésica dirijida desde M hacia M'.

Sean, por otra parte, m i m' los puntos del mapa que representan a M i M', s la distancia jeodésica MM' i σ el arco de una curva que une m con m' i representa la línea jeodésica MM'; X, Y las coordenadas de m i X' Y' las de m'; Ω el ángulo que forma la tanjente, en m, al arco de curva mm' con el meridiano central OX del mapa; Ω' el angulo de la tanjente en m', con el mismo meridiano.

Los ángulos Ω, Ω' definen, en el mapa, las direcciones de los visuales jeodésicas recíprocas MM' i $M'M$. Estos dos ángulos se cuentan a partir del meridiano central, en un sentido convenido,—de izquierda a derecha —desde cero hasta 360°. En consecuencia, Ω i Ω' difieren aproximadamente de 180°.

Se tiene ahora

$$X' = X + s\frac{dX}{ds} + \frac{s^2}{1\cdot 2}\frac{d^2X}{ds^2} + \frac{s^3}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{d^3X}{ds^3} + \dots$$

$$Y' = Y + s\frac{dY}{ds} + \frac{s^2}{1\cdot 2}\frac{d^2Y}{ds^2} + \frac{s^3}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{d^3Y}{ds^3} + \dots$$

$$\Omega' = 180^\circ + \Omega + s\frac{d\Omega}{ds} + \frac{s^2}{1\cdot 2}\frac{d^2\Omega}{ds^2} + \dots$$

Para calcular las derivadas que figuran en estas ecuaciones se considera un punto cualquiera del arco σ; sean x, y sus coordenadas; se tiene

$$\frac{dx}{d\sigma} = \cos \omega$$

$$\frac{dy}{d\sigma} = \operatorname{sen} \omega$$

Luego

$$\frac{dx}{ds} = \cos \omega \frac{d\sigma}{ds}$$

$$\frac{dy}{ds} = \operatorname{sen} \omega \frac{d\sigma}{ds}$$

Se deduce entónces de la primera ecuacion (b)

$$\frac{dx}{ds} = \cos \omega \left[1 + \frac{y^2}{2NR} \right]$$

$$\frac{d\zeta}{ds} = \operatorname{sen} \omega \left[1 + \frac{y^2}{2NR} \right]$$

Por otra parte, la ecuacion (c) da

$$\frac{d\omega}{ds} = -\frac{\zeta}{NR} \cos \omega$$

Se deduce en seguida

$$\frac{d^2x}{ds^2} = -\frac{y}{NR} \operatorname{sen} 2\omega$$

$$\frac{d^2y}{ds^2} = -\frac{y}{NR} \cos 2\omega$$

$$\frac{d^2 \omega}{ds^2} = - \frac{sen\ \omega\ cos\ \omega}{NR}$$

$$\frac{d^3 x}{ds^3} = \frac{sen\ \omega\ sen\ 2\ \omega}{NR}$$

$$\frac{d^3 \zeta}{ds^3} = - \frac{sen\ \omega\ cos\ 2\ \omega}{NR}$$

La substitucion de estos valores en las espresiones de X′, Y', Ω' da entónces

$$(h) \begin{cases} X' = X + s\, cos\,\Omega \left[1 + \frac{Y^2}{2\,NR}\right] + \frac{s^2\,Y}{2NR}\, sen\, 2\,\Omega + \frac{s^3}{6NR}\, sen\,\Omega\, sen\, 2\ \mathrm{F} \\ Y' = Y + s\, sen\,\Omega \left[1 + \frac{Y^2}{2\,NR}\right] + \frac{s^2\,Y}{2NR} cos\, 2\,\Omega - \frac{s^3}{6NR}\, sen\,\Omega\, cos\, 2\,\Omega \\ \Omega' = 180° + \Omega - \frac{s\,Y}{NR}\, cos\,\Omega - \frac{s^2}{2\,NR}\, sen\,\Omega\, cos\,\Omega \end{cases}$$

Estas fórmulas permiten resolver los dos problemas mas frecuentes de la práctica.

Problema I

Se conocen las coordenadas X, Y del punto m, el ángulo Ω i la distancia jeodésica s de los dos puntos M, M′ de la superficie de la Tierra; calcular las coordenadas X′ Y′ de m′ i el ángulo Ω′ en este punto.

Se pone, en este caso,

$$s\left(1 + \frac{Y^2}{2\,NR}\right) = S$$

$$S \cos \Omega = \xi$$

$$S \operatorname{sen} \Omega = \eta$$

$$Y + \frac{\eta}{3} = y$$

i se deduce de las fórmulas (d)

$$X' = X + \xi + \frac{s^2 y}{2 N R} \operatorname{sen} 2 \Omega$$

$$Y' = Y + \eta - \frac{s^2 y}{2 N R} \cos 2 \Omega$$

Se pone todavía

$$\frac{1}{2 N R} = h$$

$$h s^2 y = m$$

$$\delta \xi = m \operatorname{sen} 2 \Omega$$

$$\delta \eta = - m \cos 2 \Omega$$

i se tiene

$$X' = X + \xi + \delta \xi$$

$$Y' = Y + \eta + \delta \eta$$

Para el cálculo del ángulo Ω', se pone

$$\frac{1}{N R} = n$$

$$Y + \frac{\eta}{2} = y_m$$

$$- n \xi y_m = \delta \Omega$$

i se tiene, segun (h),

$$\Omega' = 180^\circ + \Omega + \delta \Omega$$

En las aplicaciones numéricas se conoce el logaritmo de la distancia jeodésica s i es conveniente calcular directamente el logaritmo de S. Sea e la base de los logaritmos neperianos; se tiene, con suficiente aproximacion,

$$log\, S = log\, s + k\, Y^2$$

$$k = \frac{log\, e}{2NR}$$

Los valores de k se calculan de antemano de tal modo que el producto $k\, Y^2$ resulte espresado en unidades de la 7.ª decimal, cuando Y está espresado en centenares de kilómetros.

Del mismo modo, el valor de h se calcula de manera que su producto por $s^2\, y$ resulte espresado en metros cuando s, y están espresados en centenares de kilómetros.

Finalmente, el valor de n que figura en el valor de $\delta\Omega$ se calcula de modo que su producto por $\xi\, y_m$ represente segundos de arco.

Las Tablas que se encuentran a continuacion contienen los valores de k, h, n. En la primera Tabla, el argumento es la latitud jeográfica i, en la segunda, la distancia s_m al paralelo de Santiago.

Problema II

Se conocen las coordenadas X, Y i X', Y' de dos puntos del mapa, determinar la distancia s de los puntos correspondientes de la Tierra i los ángulos Ω, Ω'.

Sean

$$X' - X = c\, cos\, C$$

$$Y' - Y = c\, sen\, C$$

Se deduce de las ecuaciones (d)

$$c\, cos\, (\Omega - C) = s\left(1 + \frac{Y^2}{2NR}\right) + \frac{s^2}{2NR}\left(Y + \frac{s}{3}\, sen\,\Omega\right) sen\,\Omega$$

$$c\, sen\, (\Omega - C) = \frac{s^2}{2NR}\left(Y + \frac{s}{3}\, sen\,\Omega\right) cos\,\Omega$$

Luego, con suficiente aproximacion,

$$\Omega = C + \frac{s \cos \Omega}{2 N R} \left(Y + \frac{s}{3} \operatorname{sen} \Omega \right)$$

$$s = c \left\{ 1 - \frac{Y^2}{2 N R} - \frac{s \operatorname{sen} \Omega}{2 N R} \left(Y + \frac{s}{3} \operatorname{sen} \Omega \right) \right\}$$

O todavía

$$\Omega = C + \frac{n}{2} \left(X' - X \right) \frac{2 Y + Y'}{3}$$

$$\log s = \log c - k \frac{Y^2 + Y'^2 + Y Y'}{3}$$

En las aplicaciones numéricas, se calculan, con logaritmos de siete decimales, los valores de

$$c \cos C = X' - X$$

$$c \operatorname{sen} C = Y' - Y$$

En seguida se espresan, en centenas de kilómetros, las cantidades

$$\frac{2 Y + Y'}{3} = y \qquad X' - X = \xi$$

$$\frac{Y + Y'}{2} = y_m \qquad \frac{Y^2 + Y'^2 + Y Y'}{3} = t$$

i se tiene

$$\delta C = \frac{n}{2} y \xi$$

$$\Omega = C + \delta C$$

$$\log s = \log c - k t$$

Para el cálculo de Ω' se tiene

$$\delta\Omega = -n\,\xi\,y_m$$

$$\Omega' = 180^\circ + \Omega + \delta\Omega$$

Resúmen jeneral de las fórmulas para el cálculo de las coordenadas rectangulares i de las orientaciones, segun el sistema de representacion conforme de Gauss.

I

Sean φ, λ la latitud i la lonjitud jeográfica de un punto. Segun las convenciones internacionales, la latitud φ es positiva en el hemisferio Norte i negativa en el hemisferio Sur i la lonjitud λ se cuenta, desde cero hasta 180°, con el signo mas hácia el Este i el signo — hácia el Oeste.

En el mapa del Estado Mayor Jeneral de Chile, las abcisas X se cuentan, a partir de Santiago, con el signo $+$ hácia el Sur i las ordenadas Y con el signo $+$ hácia el Oeste.

Sea entónces s_m el arco del meridiano central de Santiago, contado, como las abcisas X, con el signo $+$ hácia el Sur; se tienen las fórmulas

$$X = s_m - \frac{N\lambda^2}{4}\,sen\,2\varphi - \frac{N\lambda^4}{24}\left(sen\,2\varphi + \frac{3}{4}\,sen\,4\varphi\right) + \ldots$$

$$Y = -N\lambda\cos\varphi - \frac{N\lambda^3}{12}\left(\cos\varphi + \cos 3\varphi + 4\varepsilon\cos^5\varphi\right) + \ldots$$

El arco s_m está definido por la ecuacion

$$s_m = a\left(1 - \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon^2}{16}\right)\left(\varphi_0 - \varphi\right) - \frac{3}{4}\,a\,\varepsilon\left(sen\,2\varphi_0 - sen\,2\varphi\right)$$

$$+ \frac{15}{64}\,a\,\varepsilon^2\left(sen\,4\varphi_0 - sen\,4\varphi\right)$$

En esta ecuacion, a es el radio ecuatorial de la Tierra i ε el achatamiento. Si se adoptan los datos del elipsoide de Bessel, se tiene

$$\log a = 6{,}804.6435$$

$$\log \epsilon = \overline{3}{,}524.1110$$

Ademas la latitud inicial φ_o es

$$\varphi_c = -\ 33^\circ.\ 26'.\ 42,''0$$

El valor de la gran normal N se deduce de la ecuacion

$$N = a\left(1 + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{5\varepsilon^2}{16}\right) - a\left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2}\right)\cos 2\varphi + \frac{3\,a\,\varepsilon^2}{16}\cos 4\varphi + \ldots$$

El cálculo numérico da

$$s_m = 6.366.742^{m}\left(\varphi_o - \varphi\right) - 15.988{,}8^{m}\left(sen\ 2\ \varphi_o - sen\ 2\ \varphi\right)$$

$$+\ 16{,}7^{m}\left(sen\ 4\ \varphi_o - sen\ 4\ \varphi\right)$$

O bien

$$s_m = \left[6{,}803.9173\right]\left(\varphi_o - \varphi\right) - \left[4{,}203.8158\right]\left(sen\,2\,\varphi_o - sen\,2\,\varphi\right)$$

$$+\left[1{,}2228\right]\left(sen\ 4\ \varphi_o - sen\ 4\ \varphi\right)$$

Las cantidades entre *[ ]* representan logaritmos.
Se tiene tambien

$$N = 6.388.078{,}5^{m} - 10.694{,}8^{m}\cos 2\ \varphi + 13{,}4^{m}\cos 4\ \varphi$$

O bien

$$N = \left[6.805.3702\right] - \left[4{,}029.1727\right]\cos 2\varphi + \left[1.1271\right]\cos 4\varphi$$

II

El azimut astronómico A se cuenta, jeneralmente, a partir del meridiano Norte, desde cero hasta $360°$, en el sentido Norte, Este. En el mapa del Estado Mayor Jeneral, la orientacion Ω se cuenta a partir del meridiano Sur, en el mismo sentido que el azimut; en consecuencia, la fórmula que se debe emplear es

$$\Omega = 180° + A - \lambda \, sen \, \varphi - \frac{\lambda^3}{3} \, sen \, \varphi \, cos^2 \, \varphi$$

III

Cuando se conocen las coordenadas X, Y de un punto, su distancia jeodésica s a otro punto i la orientacion Ω de la visual a éste, las coordenadas X'. Y' del segundo punto i la orientacion recíproca Ω' se deducen de las fórmulas

$$X' = X + \xi + \delta \xi$$

$$Y' = Y + \eta + \delta \eta$$

$$\Omega' = 180° + \Omega + \delta \Omega$$

i se tiene

$$log \, S = log \, s + k \, Y^2$$

$$\xi = S \, cos \, \Omega$$

$$\eta = S \, sen \, \Omega$$

$$y = Y + \frac{\eta}{3}$$

$$m = h \, s^2 \, y$$

$$\delta \xi = m \, sen \, 2 \, \Omega$$

$$\delta \eta = - m \, cos \, 2 \, \Omega$$

En el cáculo de $k\,Y^2$, y, m se espresa Y, η, s en centenares de kilómetros i los valores de k, h se encuentran en la Tabla adjunta.

En esta Tabla el valor de k está calculado de tal manera que su producto por Y^2 resulta espresado en unidades de la 7.ª decimal. Tambien el valor de h está calculado de tal modo que m resulta espresado en metros

Para el cálculo de la orientacion Ω', se tiene

$$y_m = Y = \frac{\eta}{2}$$

$$\delta\,\Omega = -\,n\,\xi\,y_m$$

El valor de n se encuentra en la Tabla adjunta i su producto por $\xi\,y_m$ representa segundos de arco.

IV

Determinar la distancia jeodésica de dos puntos i las orientaciones de la visual que los une, cuando se conocen las coordenadas rectangulares de estos puntos.

Sean X, Y i X', Y' las coordenadas de los dos puntos; se calcula

$$c\ cos\ C = X' - X$$

$$c\ sen\ C = Y' - Y$$

En seguida se espresan, en centenares de kilómetros, las cantidades

$$y = \frac{2\,Y + Y'}{3} \qquad \xi = X' - X$$

$$y_m = \frac{Y + Y'}{2} \qquad t = \frac{Y^2 + Y'^2 + YY'}{3}$$

i se tiene

$$\delta\,C = \frac{n}{2}\,y\,\xi$$

$$\delta\,\Omega = -\,n\,\xi\,y_m$$

$$\log s = \log c - k\,t$$

$$\Omega = C + \delta\, C$$

$$\Omega' = 180^\circ + \Omega + \delta\, \Omega$$

Los valores de n i k se encuentran en la Tabla adjunta.

Esta Tabla se ha calculado de dos maneras: 1.º con el argumento φ i 2.º con el argumento s_m .

Tabla para el cálculo de las coordenadas rectangulares i de las orientaciones

φ	k		$\log h$		$\log n$	
20°	536,6		1,0917		1,7074	
		1,0		8		8
30	535,6		1,0909		1,7066	
		1,1		9		9
40	534,5		1,0900		1,7057	
		1,2		10		10
50	533,3		1,0890		1,7047	
		1,1		9		9
60	532,2		1,0881		1,7038	
		1,0		8		8
70	531,2		1,0873		1,7030	

s_m Km	k		$\log h$		$\log n$	
— 1000	536,2		1,0913		1,7070	
		1,0		7		7
0	535,2		1,0906		1,7063	
		1,0		8		8
+ 1000	534,2		1,0898		1,7055	
		1,0		9		9
+ 2000	533,2		1,0889		1,7046	
		1,0		8		8
+ 3000	532,2		1,0881		1,7038	
		0,9		8		8
+ 4000	531,3		1,0873		1,7030	