TRATADO ELEMENTAL

DE

DIBUJO LINEAL.

APROBADO

POR LA UNIVERSIDAD DE CHILE

I ADOPTADO

POR EL SUPREMO GOBIERNO

PARA EL USO DE LAS ESCUELAS I COLEJIOS DE LA REPÚBLICA,

POR

Juan Bianchi,

(Profesor del Instituto Nacional.)

Santiago.

LIBRERIA DE D. PEDRO YUSTE I C.A

Calle de los Huérfanos N.° 29 A. B, C. esquina a la de la Bandera.

— 1863. —

IMPRENTA NACIONAL, CALLE DE LA MONEDA NÚM. 46.

APROBACION UNIVERSITARIA

I ADOPCION DE ESTE TRATADO.

Santiago, junio 20 de 1863.—Pongo en conocimiento de US. que la Facultad de Ciencias Físicas i Matemáticas en su sesion de 18 del corriente aprobó por unanimidad de votos el informe que acompaño, i en el cual el comisionado don Francisco Velazco emite su juicio sobre el mérito comparativo del tratado de Dibujo lineal presentado por el señor Bianchi, i del libro que sirve actualmente al uso de las Escuelas primarias, escrito por Bouillon. La Facultad al aprobar completamente las razones que han inducido a don Francisco Velazco a dar preferencia al primero, acordó espresar en el acta de la sesion que el mencionado juicio comparativo de los dos testos se refiere al libro elemental de Bouillon, intitulado: *Principios de Dibujo lineal* traducido al español por J. Z., i no a la obra mas estensa del mismo autor destinada para escuelas superiores.—Dios guarde a US.—*Francisco de Borja Solar.*—Al señor Rector de la Universidad.

Santiago, marzo 27 de 1863.—Señor Decano:—Si el dibujo se propusiere solo adiestrar a los alumnos en la ejecucion sobre el papel de las figuras que resultan de combinar las líneas rectas i las curvas, no cabe duda que el testo de M. Bouillon llenaria mejor que el del señor Bianchi tal propósito. Efectivamente, de las veinticuatro láminas de que se compone el atlas de M. Bouillon, diez i nueve ocúpanse esclusivamente de embaldosados, compartimientos, orladuras, artesonados, letras, estrellas etc., i las cinco restantes no están exentas todavía de estos ejercicios del dibujo. Pero si a mas de esto se quisiera enseñar a los alumnos aplicaciones útiles de esas mismas figuras, la obra del señor Bianchi aventaja con mucho a la de M. Bouillon. Uno i otro contienen los principios mas elementales del ramo; pero abunda mas en ellos el señor

Bianchi, preparando por consiguiente mejor a sus discípulos. Su obra no se halla recargada con la acumulacion inútil, estéril de cien figuras caprichosas, sino que contiene aquellas de una aplicacion inmediata en las artes industriales. El alumno versado en el testo de M. Bouillon descollará en el dibujo de ornamentacion, pero no sabrá que cosa es una ensambladura, ún empalme, un engargante, una columna, un pedestal, un uuste, un cornizamento, ni otras muchas cosas de práctica e inmediata utilidad, que forzosamente han de ser familiares a los que estudian el testo del señor Bianchi. Atendido el rol que este ramo de enseñanza va a desempeñar entre las clases industriales de nuestra sociedad, la Facultad ha juzgado necesario que despues de dar a conocer las propiedades de las líneas, superficies i volúmenes, debia ocuparse de aplicaciones a la carpintería, a la mecánica i a la arquitectura. Tenia presente que en los pueblos de la República, con escepcion de Santiago i Valparaiso, sus habitantes no tienen sino la Escuela superior departamental o la primaria, para iniciarse en estos conocimientos de que absolutamente carecen, siendo su desenvolvimiento de una importancia trascendental para la multitud i variada naturaleza de talleres privados que constituyen la industria nacional. El testo del señor Bianchi se acerca infinitamente mas que el de M. Bouillon a este programa. De consiguiente, lo encuentro preferible para las escuelas de instruccion primaria. Lo digo a Ud. en desempeño de la comision con que se ha servido honrarme.—Dios guarde a Ud.—*Francisco Velazco.*—Al señor Decano de Matemáticas.

Santiago, julio 2 de 1863.—El Presidente de la República con fecha de hoi, ha decretado lo que sigue:

«En vista de lo espuesto en la nota que precede, decreto:

«Adóptase como testo de enseñanza para el estudio del dibujo lineal en los Colejios de la República, la obra que con este objeto ha compuesto el profesor del Instituto Nacional don Juan Bianchi.—Anótese i comuníquese.»

Lo trascribo a Ud. para su conocimiento i fines consiguientes.—Dios guarde a Ud.—*Miguel M. Güemes.*—Al Rector del Instituto Nacional.

TRATADO ELEMENTAL
DE
DIBUJO LINEAL.

NOCIONES PRELIMINARES.

1. Se llama dibujo en jeneral la figura o imájen de un objeto representado sobre una superficie. Si el objeto está representado tal como se ofrece a nuestra vista, se llama *dibujo perspectivo o natural,* i *dibujo jeométrico o en real* si lo está sin alterar sus formas ni proporciones.

2. Todo dibujo, sea jeométrico o perspectivo, consta de dos partes: la primera i mas esencial es la delineacion o trazado del objeto con solo líneas, i se llama *dibujo lineal;* la segunda es la espresion de la luz o sombreado, i se le dá el nombre de *dibujo lavado.* El dibujo lineal es indispensable a los artesanos, pues para poder ejecutar con precision un mueble, una máquina o cualquiera otro objeto complicado, necesitan primero hacer el trazado o delineacion jeométrica del todo i de cada una de las partes, sea del tamaño natural, o reducido a una proporcion cualquiera. El sombreado o lavado es útil para poder dar una idea mas clara del objeto que van a representar, a las personas interesadas en comprender su verdadera forma en todos sus detalles.

3. La aplicacion del dibujo a la representacion de los diferentes objetos que ofrece la naturaleza, i que la industria elabora, ha dado lugar a varias clasificaciones que se designan con nombres particulares, a saber: *dibujo natural*, *de adorno, de arquitectura, de paisaje, de perspectiva, etc.* Jeneralmente,-se divide en dos grandes secciones la representacion de todos estos objetos: la primera que comprende la figura o cuerpo humano, animales, plantas i todo lo que se imita de la naturaleza, i que comunmente se hace a pulso i a ojo, pertenece a las *bellas artes*; i la segunda que comprende los objetos que sirven para la construccion de los edificios, máquinas, muebles, etc., se llama *dibujo industrial.* Solo nos ocuparemos de esta última seccion por ser el objeto de esta obrita instruir a los artesanos.

4. En este tratado daremos el nombre de *figura* a todo dibujo compuesto de una o mas líneas, i como una figura puede constar solo de rectas, o solo de curvas, o de rectas i curvas a la vez, de aquí nace la division de las figuras en *rectilíneas*, *curvilíneas* i *mixtilíneas.* Rectilínea es la que se compone solo de líneas rectas; curvilínea es la que está compuesta solo de curvas; i mixtilínea la que está formada de rectas i curvas. En una figura distinguiremos dos clases de líneas: una seguida sin interrupcion alguna que llamaremos *de resultado*, i otra formada de puntos que se llamará *de operacion o de ausilio.*

PRIMERA PARTE.

CAPÍTULO PRIMERO.

DE LAS LÍNEAS.

Definiciones.

5. Se llama *línea* en jeneral en el dibujo, el rastro o señal que deja una pluma, un lápiz u otra materia al pasarla sobre el papel o tablero.

6. Una línea no tiene mas que *lonjitud.*

7. El estremo de una línea se llama *punto:* un punto no tiene dimension alguna.

8. La forma de las líneas son dos: *recta* i *curva.*

9. Línea recta es la que tiene todos sus puntos en una misma direccion, i por consiguiente se puede definir *el camino mas corto entre dos puntos*: la *fig.* 1 es una línea recta.

10. Una línea se llama curva cuando los puntos que la forman varian constantemente en su direccion: *fig.* 2.

11. Por posicion de una línea se entiende el modo de estar ésta respecto de otra. Jeneralmente las posiciones de las rectas son cinco: *vertical*, *horizontal*, *perpendicular*, *oblícua* i *paralela.* Las dos primeras son invariables en su direccion, las otras tres varían segun la línea a que tienen referencia.

12 Se llama *vertical o de aplomo* cuando se halla en la direccion de un hilo suspendido en el aire i de cuyo estremo inferior cuelga un plomo u otro cuerpo pesado: *fig.* 3.

13. Una recta es *horizontal o de nivel* cuando está o puede estar cortada por una vertical, sin que esta línea se incline ni a un lado ni a otro respecto de la primera: *D C fig.* 4.

14. Se llama *perpendicular* una recta cuando al caer sobre otra no se inclina ni a uno ni a otro lado de ésta: *fig.* 4.

15. *Paralelas* son rectas que prolongadas hasta el infinito nunca se cortan como *A B*, *C D*: *fig.* 6.

16. Una recta es *oblícua* cuándo al caer sobre otra se inclina mas a un lado que a otro como la *A. B.*: *fig.* 5. Tambien se dice que una recta es oblícua sin que tenga relacion con otra, siempre que no sea vertical ni horizontal.

17. De la recta i curva se forman otras dos llamadas la una *quebrada*, i la otra *mixta.*

18. *Línea quebrada* es la que se compone de dos o mas rectas: *fig.* 7.

19. *Línea mixta* se llama la que se compone de rectas i curvas: *fig.* 8.

20. Ahora, para facilitar la resolucion de los ejercicios i figuras que nos ocuparán ántes de tratar de las curvas, es preciso que demos a conocer la única curva que considera la jeometría elemental, esto es, la *circunferencia de círculo*: *fig.* 9. Esta figura es una curva cerrada, trazada sobre un plano, cuyos puntos distan todos igualmente de otro *C*. llamado *centro* i situado en el mismo plano. La superficie plana limitada por la circunferencia se llama *círculo:* las rectas *C B*, *C D* que salen del centro i terminan en la circunferencia, se llaman *radios* i son todos iguales entre sí; la recta *A B* que pasa por el centro i termina por ámbos estremos en la circunferencia, se llama *diámetro*, i tambien todos los diámetros de una misma circunferencia son iguales, por valer cada uno dos radios: una porcion cualquiera de circunferencia *B D*, toma el nombre de *arco*; i finalmente se llama *cuerda* de un arco la recta que une sus estremos como *B a D*.

21. Toda circunferencia, sea grande o pequeña, se divide en 360 partes iguales, que se llaman *grados*; cada grado en 60 partes iguales, que se llaman *minutos*; cada minuto en 60 partes iguales, que se llaman *segundos* etc.; i se escriben con los signos siguientes:

El grado. . . . . ${}^{\circ}$
El minuto . . . . $'$
El segundo . . . . $''$ etc.

Este sistema es el antiguo, i se llama *sexajesimal.*

El moderno, llamado *centesimal*, consiste en dividir la circunferencia en 400 grados, el grado en 100 minutos, el minuto en 100 segundos, i así sucesivamente.

Para reducir grados del sistema sexajesimal a grados centesimales, se multiplica el número de los primeros por 10 i se divide el producto por 9; vice-versa para reducir grados centesimales a sexajesimales, se multiplica por 9 el número de aquellos i se divide el producto por 10.

Para reducir los minutos del primer sistema al segundo, se multiplica el número de aquellos por 100 i se divide el producto por 54; i vice-versa para reducir los minutos centesimales a sexajesimales.

Para reducir los segundos sexajesimales a centesimales, se multiplica el número dado por 1,000, i el producto se divide por 324; para reducir los segundos centesimales a segundos sexajesimales, se multiplica por 324 i se divide el producto por 1,000.

La division de la circunferencia, a mas de tener una importante aplicacion en las artes i sobre todo en la mecánica, sirve tambien para medir los ángulos, como se verá a su tiempo.

22. Trazado de las rectas.—El trazado de las rectas se ejecuta por diferentes métodos segun su mayor o menor lonjitud.

Para trazar una recta de corta estension se emplea *la regla rectificada*. Se aplica esta sobre los dos puntos *a* i *b* o a mui inmediata distancia: *fig.* 1, i con el lápiz, la pluma o tiralíneas que se corre por el borde de la regla, se traza la recta. No hai cosa mas fácil que esta operacion; bastará solo atender a no variar la inclinacion del lápiz miéntras se traza la línea.

Para rectificar una regla bastará trazar con ella una recta i luego trastornando la misma regla por sus estremos se volverá a trazar otra, valiéndose siempre del mismo borde con que se trazó la primera. La regla será exacta siempre que las dos rectas se confundan en una sola.

Si se trata de trazar una recta de una lonjitud tal que no alcanzára una regla, como lo suelen practicar los carpinteros, albañiles etc., se usa de una cuerda delgada untada con almagre u otra composicion conveniente; se sujetan sus estremos de modo que quede el cordel bien estirado, se levanta una o mas veces por diferentes partes hasta que con su caida deje marcada la recta que se quiere trazar.

Para trazar una verdadera vertical o una horizontal, nos valdremos para la primera del hilo a plomo, i para la segunda del nivel. Pero cuando estas líneas son supuestas sobre un papel o pizarra, bastará que la vertical sea paralela a los bordes laterales del papel o pizarra, i que la horizontal lo sea a los bordes inferior i superior, siempre que este papel o pizarra tengan una forma conveniente.

23. Trazar una perpendicular por el medio de otra recta dada: *fig* **15.**

Trácese primero la recta *A B*, i desde sus puntos estremos, con una abertura de compas mayor que la mitad de la recta, se trazarán dos arcos de círculo por la parte superior de la recta i dos por la parte inferior, *C*, *D*, que llamaremos interseccion de arcos; uniendo *C* con *D*, se tendrá la perpendicular pedida, que dividirá en dos partes iguales a la *A B* en el punto *E*.

24. Por el punto *C* de la recta *A B* *fig.* 17, levantar una perpendicular.

Señálese a igual distancia del punto *C* los puntos *m n*, i desde estos puntos como centros i con un radio mayor que *m C* fórmese la interseccion *D:* la recta *C D* será la pedida.

25. Trazar una perpendicular a una recta desde un punto dado fuera de ella: *fig.* **16.**

Trazada la recta *A B*, desde el punto dado *C*, considerado como centro, se describirá un arco de círculo con un radio tal que pueda cortar la recta dada en dos puntos, como *m n*, i desde estos puntos i con un radio conveniente fórmese la interseccion de arcos *D*: uniendo *C* con *D* se tendrá la perpendicular pedida.

26. Por el estremo *A* de la recta *A B* levantar una perpendicular: *fig.* 18.

Desde *A* como centro i con un radio arbitrario, descríbase el arco de círculo indefinido *m n*; aplíquese el mismo radio desde *m* hasta *o*, i desde *o* hasta *p*, i por estos dos puntos como centros i con un radio cualquiera fórmese la interseccion *C*; uniendo *C* con *A* se tendrá la perpendicular pedida. Se entiende que la recta *A B* no se puede prolongar por el estremo *A*, de lo contrario la operacion habria quedado reducida al problema 24.

27. Por el punto *C* tirar una paralela a la recta *A B*: *fig.* 19.

Hágase centro en el punto dado *C* i con el mayor radio posible trácese el arco indefinido *m n*, i con el mismo radio, i desde *m* como centro, descríbase el arco *CB;* con la cuerda *B C* i con el centro *m* córtese el arco *m n* en el punto *D:* la recta trazada por los dos puntos *C* i *D* será paralela a la *A B*.

La *fig.* 20 representa el modo de trazar una paralela a una recta que diste una magnitud dada: márquense sobre la *A B* dos puntos como *m n*, i desde ellos como centros i con un radio igual a la distancia a que se quiere trazar la paralela, descríbanse dos arcos de círculo: la recta *C B* que pase por los puntos mas culminantes de los arcos será la paralela en cuestion.

28. Dividir la recta *A B* en un número cualquiera de partes iguales; en siete, por ejemplo: *fig.* 21.

Por uno de sus estremos *A*, tírese una recta indefinida *A m*, i aplíquese sobre ésta, empezando por el punto *A*, una magnitud cualquiera, siete veces. Únase el último punto de division 7 con el estremo *B* de la recta dada i tirando por los demas puntos 6, 5, 4... paralelas a la 7 *B*, estas dividirán a la *A B* en siete partes iguales en los puntos 1, 2, 3...

29. Se puede dividir una recta en dos o mas partes igua-

les por medio del tanteo; pero a mas de que este sistema tiene el inconveniente de maltratar el papel, es sumamente largo si se quiere obtener un resultado exacto. Las paralelas trazadas por medio de la regla i la escuadra ofrecen un medio pronto i fácil para evitar tales inconvenientes. Cuando se quiere dividir una recta en dos partes iguales, se hace uso del sistema de levantar una perpendicular por el centro de una recta (núm. 23)

Con la regla i la escuadra no solo se puede trazar paralelas sino tambien perpendiculares a una recta.

CAPÍTULO II.

DOS LÍNEAS RECTAS.

Angulos.

30. Dos rectas trazadas sobre un mismo plano o se encuentran, como las *B A*, *B C*: *fig* 10, o no pueden encontrarse por mas que se las prolongue, como sucede con las rectas *A B*, *C D*: *fig*, 19: en el primer caso se dice que dichas rectas forman un *ángulo*, en el segundo que son paralelas (núm 15). De suerte que *ángulo* es la abertura de dos líneas que se encuentran en un punto *B* llamado *vértice del ángulo*: las rectas *A B*, *B C* se llaman *lados de ángulo*.

31. Para enunciar un ángulo cuando está solo, se suele pronunciar simplemente la letra del vértice; pero si en el vértice concurren mas de dos líneas, entonces se nombra cada ángulo con tres letras, pronunciando en medio la del vértice. Así se leerá *A B C*, o *C B A* i de ningun modo *B A C* ni *B C A*: *fig*. 10.

32. Un ángulo se mide por el arco *m n* descrito desde su vértice como centro, i con un radio cualquiera *fig*. 10.

33. De la mayor o menor abertura resultan tres clases de ángulos que se distinguen con los nombres de *recto*, *agudo* i *obtuso*: *ángulo recto* es el que tiene perpendicula-

res sus lados, como el *A B C: fig.* 4; *ángulo agudo* es el que es menor que un recto, como el *A B C: fig.* 5; i *ángulo obtuso* es el que es mayor que un recto como el *A B D: fig.* 5. Con el nombre de *ángulos oblicuos* se comprenden los ángulos obtusos i agudos.

34. La medida de un ángulo por medio del arco trazado desde su vértice i comprendido entre sus lados no es suficiente para darnos una verdadera idea de su magnitud, i mucho ménos cuando se habla de un ángulo sin tenerlo a la vista: ha sido, pues, necesario discurrir algun medio que facilitase la medida de los ángulos de un modo fijo i facil de poderla apreciar. Consiste éste en averiguar cuantos grados comprenden la abertura de un ángulo. Para esto, una vez trazado el arco *m n: fig.* 5, se verá cuantos grados contiene dicho arco, de los 360 en que está dividida la circunferencia de la misma figura (núm. 21), i éste número será el que esprese la abertura del ángulo *A B C*. Así un arco de 90°, siendo la cuarta parte de 360, lo que equivale a la cuarta parte de una circunferencia, estará comprendido entre dos rectas perpendiculares una a otra, i se llamará *cuadrante*; uno de 60° se llamará *sestante*; el de 45° *octante* etc.

35. Hasta aquí hemos considerado los ángulos aisladamente; veamos que nombre tomarán cuando se comparan unos con otros. Diremos en primer lugar que dos ángulos se llaman *contiguos* o *adyacentes* cuando tienen un lado comun i los otros dos lados son prolongacion uno de otro; tales como *A B C*, *A B D*: *fig.* 5; diremos que los ángulos *son opuestos al vértice* cuando no son adyacentes i están formados por dos rectas que se cruzan, como los *C E A*, *D E B: fig.* 15; les llamaremos *suplementarios* cuando el uno sea lo que falta al otro para valer dos ángulos rectos o 180°; como *z* respecto de *A B D: fig.* 5; dos ángulos serán por fin *complementarios* cuando sea el uno lo que sobra o falta al otro para valer un ángulo recto o 90°, como

el *n* respecto al *E B D* i respecto al *z*, llamándose el complemento por *exceso* en el primer caso i por *defecto* en el segundo: *fig*. 4.

36. Cuando dos paralelas *A B*, *C D*: *fig*. 6, son cortadas por otra recta *E F*, toma ésta el nombre de *secante* i forma ocho ángulos con dichas paralelas Los cuatro que están en la parte interior *q*, *s*, *r* i *t* se llaman *internos*, i los cuatro que están en la parte esterior *o*, *m*, *p* i *n* se denominan *esternos*. Dos ángulos internos (*q*, *r*), o (*s*, *t*), uno en cada paralela i a diferente lado de la secante, toman el nombre de *alternos internos*; dos ángulos esternos (*o*, *p*) o (*m*, *n*) a distinto lado de la secante i uno en cada paralela se llaman *alternos esternos*; i dos ángulos (*m*, *r*), (*s*, *p*) u (*o*, *t*), (*q*, *n*) esterno el uno e interno el otro, a un mismo lado de la secante, i uno en cada paralela, se denominan *correspondientes*.

37. De lo dicho resulta: 1.° que la magnitud de un ángulo no pende de la magnitud de sus lados i sí solo de su abertura (núm. 33); 2.° que todos los ángulos rectos son iguales entre sí i tienen por medida un cuadrante o sea un arco de 90°; 3.° que todo ángulo obtuso valiendo mas de 90°, i ménos de 90° todo ángulo agudo, todos los ángulos obtusos tendrán su complemento por exceso i todos los agudos los tendrán por defecto (núm. 35); 4.° que cuando una recta *A B*: *fig*. 5, encuentra otra *C D*, forma con ella dos ángulos adyacentes *E B C*, *E B D* que juntos valen dos rectos o 180°; i que del mismo principio se deduce que todos los ángulos sucesivos que sobre un plano se forman al rededor de un punto, sumados serán iguales a cuatro ángulos rectos o sean 360°; i 5.° que los ángulos opuestos a un mismo vértice (*m*, *q*) (*o*, *s*): *fig* 6 etc., son iguales entre sí.

38. Para averiguar el número de grados que contiene un ángulo se hace uso de un instrumento llamado *trasportador*, que consiste en un semicírculo de laton o asta divi-

dido en grados i minutos: *fig.* 12. Se coloca éste de modo que el centro *C* se confunda con el vértice del ángulo que se quiera medir, i el radio *C B* coincida exactamente con uno de los lados del ángulo; el otro lado marcará sobre la semicircunferencia del trasportador el número de grados de que consta el ángulo.

39. Trazar un ángulo igual al ángulo *A B C*: *fig.* 10.

Para trazar un ángulo igual a otro dado bastará averiguar por medio del trasportador cuantos grados contiene el ángulo dado i luego construir otro que tenga igual número de grados (núm. 38). Pero como se ha dicho que un ángulo se mide por el arco comprendido entre sus lados i trazado desde su vértice (núm. 32), se trazará un ángulo igual a otro haciendo centro en el vértice *B* i con un radio cualquiera *B m*, se trazará el arco *m n*, i con igual abertura desde un punto *B*: *fig* 11, de la *B C*, descríbase el arco indefinido *p q*: tómese la cuerda *m n* i desde *p* córtese en *o* este último arco. La recta *A B* formará con la *B C* el ángulo *A B C*, igual al *A B C* de la *fig.* 10 como se habia pedido.

40. Dado un ángulo *A B C* *fig.* 13 dividirle en 2, en 4, en 8, 16.... partes iguales.

Desde el vértice *B* como centro, i con un radio *B m* trácese el arco *m z n*: desde *m* i *n* con un radio mayor que la mitad de la cuerda *m n* descríbanse otros dos arcos que se crucen en *D*. La recta *B D* dividirá por mitad el ángulo *A B C*. La recta que divide por mitad un ángulo toma el nombre de *bisectriz* del mismo ángulo. Haciendo igual operacion con respecto a cada uno de los ángulos *A B D*, *D B C*, se tendrá dividido el total en 4 partes iguales etc.

Para dividir un ángulo en un número impar de partes se dividirá por tantèo el arco trazado conforme a la regla dada en el problema anterior, en tantas partes iguales cuantas son las en que se quiere dividir el ángulo i tirando por cada punto de division rectas al vértice, se tendrá dividido el ángulo como se desea.

41. Para dividir un ángulo recto en tres partes iguales, se describirá desde su vértice i con un radio cualquiera, un arco comprendido entre los lados del ángulo, aplicando el mismo radio, *fig.* 17, desde los puntos *r s* i cortando el arco, quedará este dividido en tres partes iguales en los puntos 1 i 2.

Antes de pasar a las figuras de tres rectas será conveniente que los alumnos se ejerciten en resolver los siguientes problemas:

I. Por diversos puntos bajar perpendiculares a una recta valiéndose de la regla i la escuadra, *fig.* 22.

II. Por varios puntos trazar paralelas a una recta dada, tambien con regla i escuadra, *fig.* 22.

III. Hallar una recta igual a la suma de varias rectas dadas.

IV. Hallar una recta igual a la diferencia de dos rectas dadas.

V. Por un punto dado trazar una horizontal i una vertical.

VI. Hacer un ángulo igual a la suma de varios ángulos dados.

VII. Construir un ángulo igual a un número de veces (3 por ejemplo) un ángulo dado.

VIII. Determinar un ángulo igual a la diferencia de dos ángulos dados (núm. 32 i 38.)

IX. Calcular el suplemento de un ángulo dado (núm. 29.)

X. Dado un ángulo agudo u obtuso calcular su complemento (núm. 35.)

CAPÍTULO III.

TRES LÍNEAS RECTAS.

Triángulos.

42. *Area* o *superficie* es el espacio cerrado por un contorno de una figura cualquiera. Al conjunto de líneas que cierran una superficie se llama *perímetro.*

43. Las superficies se dividen en *planas* i *curvas*: plana es la que permite trazar sobre ella una recta en todos sentidos, como la cubierta de una mesa, un espejo etc.; i curva es la que no es plana, la cual puede ser *cóncava* o *convexa:* superficie cóncava es la representada por la parte interior de una bola, i convexa es la parte esterior.

44. Cuando una superficie plana está cerrada por líneas rectas, toma en jeneral el nombre de *polígono*, i se llama en particular *triángulo*, cuando son tres las rectas que cierran dicha superficie: *fig.*23. Estas rectas se llaman *lados del triángulo* o *lados del polígono*, si se emplea esta voz jenérica, i los puntos en que se cortan los lados se llaman *vértice del triángulo.*

45. Si se atiende a la magnitud respectiva de los lados de un triángulo, se verá que no puede suceder mas que una de tres cosas: o todos los lados son iguales, o hai dos iguales solamente, o los tres son desiguales. En el primer caso el triángulo se llama *equilátero*, en el segundo *isóceles* i en el tercero *escaleno*. Así diremos que *triángulo equilátero* es el que tiene iguales sus tres lados *fig*. 23; *triángulo isóceles* es el que tiene dos lados iguales *fig*. 24; i *triángulo escaleno* es el que tiene desiguales sus tres lados *fig*. 25.

46. Con relacion a sus ángulos se dividen tambien los triángulos en *rectángulos*, *obtusángulos* i *acutángulos*. Se llama *triángulo rectángulo* el que tiene un ángulo recto, *fig*. 26; *triángulo obtusángulo* el que tiene un ángulo obtu-

so *fig.* 25; i *triángulo acutángulo* el que tiene agudos sus tres ángulos *figs.* 23 i 24.

47. El triángulo rectángulo goza de propiedades mui interesantes i por esto se han dado nombres particulares a sus lados. Así se llaman *catetos* los dos lados que forman el ángulo recto, como *A B*, *A C*: *fig.* 26; i toma el nombre de *hipotenusa* el lado *B C*, opuesto al ángulo recto.

48. Se llama *base* en un polígono cualquiera, el lado sobre el cual se considera que descansa; así *A B* *fig.* 24 es la base del triángulo *A B C*. La *altura* de un triángulo es la perpendicular bajada a la base o a su prolongacion desde el vértice del ángulo opuesto; como *C D* en las *figs.* 24 i 25.

49. Las propiedades de los triángulos en jeneral son las siguientes:

1.° Que dos triángulos son iguales cuando tienen respectivamente iguales los tres lados, o dos lados iguales e igual el ángulo formado por ellos, o un lado igual e iguales respectivamente dos de sus ángulos.

2.° En todo triángulo la suma de dos lados es mayor que el tercero.

3.° En un triángulo cualquiera, a lados iguales se oponen ángulos iguales i al contrario; deduciéndose de aquí que en todo triángulo equilátero son iguales sus tres ángulos.

4.° En todo triángulo, a mayor lado se opone mayor ángulo i vice-versa.

5.° La suma de los tres ángulos de un triángulo vale dos ángulos rectos o 180°. De este importante principio se deducen las siguientes verdades: 1.ª en un triángulo no puede haber ni dos ángulos obtusos, ni uno recto i uno obtuso, ni tampoco dos ángulos rectos; 2.ª en todo triángulo el valor de un ángulo es suplemento (núm. 35) de la suma de los otros dos i al contrario; 3.ª en todo triángulo rectángulo, los dos ángulos agudos son complementos uno de otro, etc.

6.° Las tres perpendiculares que dividen por mitad los lados de un triángulo se encuentran en un mismo punto, igualmente distante de los tres vértices de dicho triángulo.

7.° Las tres bisectríces (núm. 40) de un triángulo se encuentran en un mismo punto equidistante de los tres lados del propio triángulo.

8.° Dos triángulos son iguales en superficie siempre que tengan igual base e igual altura.

50. Construir un triángulo equilátero cuyos lados sean iguales a una recta *A B*: *fig*. 23.

Desde *A* i *B* con un radio igual a *A B* hágase la interseccion de arcos *C*: trazando las *A C*, *B C* se tendrá construido el triángulo pedido.

51. Construir un triángulo equilátero cuya altura sea *B D*: *fig*. 29.

Tírese una recta indefinida *m n* i en un punto *D* levántese una perpendicular igual *D B* (núm. 24); en *B* hágase un ángulo recto i divídase éste en tres partes iguales en los puntos 1, 2 (núm. 31): por el punto *B* i el primer punto de division 1 tírese una recta que cortará a la *m n* en el punto *C*; señálese *D A* igual a *D C*, i uniendo *A* con *B* se tendrá el triángulo pedido.

52. Trazar un triángulo isóceles cuya altura sea igual a la *C D* **i la base a la** *A B*: *fig*. 24.

Por el punto *D*, centro de la base dada, levántese la perpendicular *D C* igual a la altura; uniendo *C* con *A* i con *B* se tendrá trazado el triángulo pedido.

53. Trazar un triángulo isóceles cuya base sea la recta *A B* **i los otros dos lados sean iguales a la recta** *A C*: *fig*. 24.

Desde *A* i *B* como centros i con un radio igual a *A C* hágase la interseccion de arcos *C*; uniendo *C* con *A* i *B* por medio de rectas se habrá trazado el triángulo pedido.

54. Trazar un triángulo isóceles cuya altura sea la recta *C D* **i los lados iguales, la recta** *A C* *fig*. 24.

En el punto D de una recta indefinida levántese la perpendicular $D\ C$ igual a la altura que debe tener el triángulo; desde el punto C como centro i con una abertura de compas igual a $C\ A$ córtese la indefinida en los puntos A i B; trazando las rectas $A\ C$, $B\ C$ el triángulo pedido quedará construido.

55. Hacer un triángulo cuyos tres lados sean iguales respectivamente a las rectas dadas r, r' r'' *fig.* 25.

Tómese $A\ B$ igual r, i desde A con un radio igual a r' trácese un arco que se cortará en C con otro arco descrito desde B con un radio $B\ C$ igual r''. El triángulo $A\ B\ C$ es el pedido.

56. Trazar un triángulo, dados dos lados i un ángulo: *fig.* 27.

Sean los dos lados dados las rectas m, n, i el ángulo o. Trácese la recta $A\ B$ igual al lado dado n i en su estremo B fórmese un ángulo igual al ángulo o (núm. 39); limítese el lado $B\ C$ igual a m: uniendo C con A se tendrá el triángulo pedido.

57. Trazar un triángulo, dados dos ángulos i un lado: *fig.* 28.

Al estremo de la recta dada $A\ B$ fórmense dos ángulos respectivamente iguales a los ángulos dados m, n i prolónguense los lados $A\ t$, $B\ u$ hasta que se encuentren en el punto C: el triángulo $A\ B\ C$ será el pedido.

58. Trazar un triángulo rectángulo en que se conoce la hipotenusa que ha de servir de base, i la altura: *fig.* 30.

Siempre que desde un punto cualquiera de una circunferencia se trazan rectas a los estremos del diámetro, resulta un triángulo rectángulo, cuya hipotenusa es el diámetro, i los catetos las rectas que de sus estremos concurren al punto de la circunferencia. Trácese pues la hipotenusa $A\ B$ que ha de servir de base, i considerándola como diámetro, desde su centro m i con un radio igual a $A\,m$ descríbase una semicircunferencia: tírese una paralela a la base que diste de ésta una magnitud igual a la altura que ha de tener el triángulo, esta paralela cortará a la semicircunferencia en los puntos C i D: Trazando por cualquiera de estos puntos rectas a los estremos del diámetro se habrá construido el triángulo $A\,B\,C$ o $A\,B\,D$ conforme se ha pedido.

Para que el presente problema tenga solucion es preciso que la altura del triángulo no exceda a la mitad de la hipotenusa. Cuando la altura fuera igual a la mitad de la hipotenusa el triángulo rectángulo resultaria isóceles.

59. Trazar un triángulo rectángulo cuya base $A\,B$ sea la hipotenusa, i la recta $A\,C$ uno de los catetos: *fig.* 31.

Trácese con $A\,B$ como diámetro una semicircunferencia i desde A o B como centro i con un radio igual al cateto dado córtese a aquella en el punto C o D: uniendo cualquiera de estos puntos con A i B por medio de rectas se tendrá el triángulo pedido.

Si el cateto dado fuera mayor que la $A\,B$, el problema no tendria solucion.

60. Siempre que en las artes ocurre trazar una figura cualquiera, se refiere a dimensiones i formas determinadas; así pueden ocurrir tres casos, a saber: trazar una figura que sea *igual* a otra, que sea *semejante*, o que sea *equivalente*.

61. Por *igualdad* se entiende cuando una figura tiene la misma forma i magnitud que otra, de modo que si se pusiera una sobre otra se confundirian exactamente.

62. Es *semejante* una figura a otra cuando tiene la misma forma i diferente magnitud. Tambien se llama *proporcional*, porque sus lados deben ser proporcionales a los de la otra, i sus ángulos iguales.

63. *Equivalente* cuando tiene diferente forma i contiene la misma área.

Relativamente a los triángulos se ejercitarán los alumnos en resolver los siguentes problemas:

I. Construir un triángulo rectángulo isóceles cuya base sea la hipotenusa: *fig*. 32, (núm. 58.)

II. Hacer un triángulo igual a otro: *fig*. 33, (núm. 55.)

III. Hacer el triángulo *a b c* semejante al *A B C*: *fig*. 34, (núm. 62).

IV. Dividir la superficie de un triángulo en triángulos equivalentes, en tres, por ejemplo *fig*. 35, (núms. 49. 8.°, i 63.)

V. Hacer un triángulo rectángulo cuyos catetos sean iguales a dos rectas dadas *A B*, *A C*: *fig*. 26.

VI. Trazar un triángulo rectángulo que tenga un cateto igual a una recta *A B*, i el ángulo agudo adyacente igual al angulo *B*: *fig*. 26.

VII. Hacer un triángulo rectángulo que tenga por hipotenusa la recta *B C*, i uno de los ángulos agudos igual al ángulo *C*: *fig*. 26.

CAPÍTULO IV.

CUATRO LÍNEAS RECTAS

Cuadriláteros.

64. Se da el nombre de *cuadrilátero* al polígono que consta de cuatro lados; como las *figs*. 36 i 37... I como un cuadrilátero puede no tener ningun lado paralelo a otro, o tener solo dos lados paralelos o por fin paralelos de dos en dos los cuatro lados, se tiene que los cuadriláteros se dividen en *trapezoídes*, *trapecios* i *paralelógramos*. Se llama *trapezoíde* todo cuadrilátero que no tiene ningun lado paralelo a otro, *fig*. 36; se denomina *trapecio* el cuadrilátero que solo tiene un lado paralelo a su opuesto: *figs*. 37 i 38; i toma el nombre de *paralelógramo* el cuadrilátero que tiene paralelos de dos en dos sus cuatro lados: *figs*. 39, 40, 41 i 42.

65. Los trapecios se subdividen en *regulares* e *irregulares;* se llama *trapecio regular* o *isóceles* el que tiene iguales los lados que no son paralelos como el *A B C D: fig.* 37; i se denomina *trapecio irregular* el que tiene desiguales los lados opuestos no paralelos, como el *A B C D: fig.* 38, el cual puede ser *rectángulo* cuando tiene dos ángulos rectos como el mismo *A B C D*, o *escaleno* cuando sus cuatro ángulos son desiguales.

66. Los paralelógramos se subdividen en *romboídes rombos, rectángulos* i *cuadrados:* se llama *romboíde* a un paralelógramo que tenga sus ángulos i lados contíguos desiguales: *fig.* 39; *rombo* cuando sus lados son iguales i desiguales sus ángulos contiguos: *fig.* 40; *rectángulo* cuando los ángulos son iguales, i por consiguiente rectos, i los lados contiguos desiguales: *fig.* 41; i *cuadrado* se llama el paralelógramo que tiene sus ángulos i lados iguales: *fig.* 42.

67 En los trapecios se da el nombre de *bases* a los dos lados paralelos, i el de *altura* a la perpendicular bajada a una base, o a su prolongacion, desde un punto de la otra: así en los trapecios *A B C D figs.* 37 i 38, las bases son *A B*, *C D* i las alturas las *m n*. En un paralelógramo se denomina *altura* la perpendicular bajada a la base o a su prolongacion desde un punto del lado opuesto, como *m n* en la *fig.* 39. Por último se da el nombre de *diagonal* en un polígono, a la recta que une dos de sus vértices no inmediatos: así las rectas *A C* en las *figs.* 36, 39, 40, 41 i 42 son diagonales.

68. Los cuadriláteros en jeneral gozan de las siguientes propiedades:

1.° La suma de los cuatro ángulos de un cuadrilátero vale cuatro rectos o 360°.

2.° Si un cuadrilátero tiene iguales los lados opuestos, es un paralelógramo.

3.° Las diagonales de un paralelógramo se dividen mútuamente por mitad.

4.° En todo trapecio escaleno las diagonales son desiguales i se cortan en un punto de la recta que une los puntos medios de las bases.

5.° En el trapecio isóceles las diagonales son iguales i se cortan tambien en un punto de la recta que une los puntos medios de las bases; en este caso esta recta es perpendicular a las bases.

6.° En todo paralelógramo son iguales los ángulos i lados opuestos.

7.° Son suplemento uno de otro (núm. 35) los ángulos formados en los estremos de un mismo lado, en todo paralelógramo.

8.° La diagonal de un paralelógramo le divide en dos triángulos iguales.

9.° Dos paralelógramos son iguales cuando tienen respectivamente iguales dos de sus lados e igual el ángulo formado por éstos.

10. Las diagonales de un cuadrado son iguales i se cortan en un punto igualmente distante de los cuatro vértices, llamado centro: lo mismo se dirá del rectángulo.

11. Las diagonales de un cuadrado i de un rombo se cruzan perpendicularmente: *figs.* 40 i 42.

69. Trazar un trapecio regular en que se nos dan los dos lados paralelos i la altura: *fig,* 37.

Tírese la base *AB* con uno de los lados dados, i en su centro levántese la perpendicular *mn* (núms. 22 i 23), igual a la altura; por el punto *m* tírese una paralela a la *A B* (núm. 27), i aplíquese desde *m* sobre la paralela una magnitud igual a la mitad del otro lado paralelo que nos dará los puntos *C* i *D*. Se terminará el trapecio trazando las *A C*, *B D*.

70. Trazar un trapecio rectángulo cuyas bases sean iguales a las rectas *AB*, *CD* **i la altura a la** *mn*: *fig.* 38.

Al estremo *A* de la recta *AB* levántese la perpendicular *A C*; tírese por *C* la *C D* paralela a *A B*. La *D B* completará el trapecio pedido.

71. Hacer un romboíde que tenga dos lados iguales a dos rectas r, r' i un ángulo a dado: *fig.* 39.

Fórmese el ángulo *B* igual a (núm. 39), i hágase *B C* igual r, i *B A* igual r': desde *A* con un radio *B C* trácese un arco que se cortará en *D* con otro arco trazado desde *C* con el radio *A B*. El trapezoíde *A B C D* sera el pedido.

72. Trazar un romboíde cuyos lados desiguales tengan la magnitud de dos rectas r i r', i su diagonal la magnitud de la recta r'': *fig.* 39.

Con las tres rectas r, r' i r'' fórmese el triángulo *A B C* (núm. 55) luego complétese el paralelógramo *A B C D* (núm. 71) i se tendrá el romboíde pedido.

73. Construir un rombo cuyas diagonales sean iguales a las rectas r, r': *fig.* 40.

Tírense dos rectas *A C*, *B D*, que se crucen perpendicularmente (núm. 68. 11°); hágase *O A* igual *O C* igual $\frac{1}{2} r$, i *O B* igual *O D* igual $\frac{1}{2} r'$: las rectas *A B*, *B C*, *C D* i *D A* darán el rombo que se pide.

74. Hacer un rombo cuyos lados sean iguales a la recta r i el ángulo formado por dos lados inmediatos igual al dado r': *fig.* 40.

Hágase *AB C* igual r' i *A B*, *B C* iguales a r: complétese el paralelógramo *A B C D* i en él se tendrá el rombo pedido,

75. Construir un rectángulo cuya base i altura sean iguales a las rectas r i r': *fig.* 41.

En el estremo *A* de *A B* igual r levántese la perpendicular *A D* igual r' i completando el paralelógramo se tendrá el rectángulo pedido.

76. Trazar un rectángulo que tenga iguales a una recta r sus diagonales, i el ángulo que forman éstas igual al dado r': *fig.* 41.

Tírense dos rectas *A C*, *D B* que se crucen en *O* formando el ángulo *m* igual *r'* (núm. 39); hágase *O A* igual *O C* igual *O B* igual *O D* igual $^1/_2$ *r* i los vértices del rectángulo pedido serán *A*, *B*, *C* i *D*.

77. Construir un cuadrado cuya diagonal sea conocida: *fig.* 42.

Trácese la diagonal *A C*, i en su medio *m* levántese la perpendicular *D B* igual a la diagonal dada de modo que su punto medio se encuentre en *m:* uniendo los estremos de las diagonales con rectas se tendrá el cuadrado pedido.

78. Duplicar el cuadrado *A B C D: fig.* 43.

Tírese la diagonal *A C* i sobre ésta, como lado, levántese el cuadrado *A C E F* que será duplo del cuadrado dado. Para hacer un cuadrado cuya superficie sea la mitad de un cuadrado conocido, sobre uno de los lados de éste, como diagonal, se construirá otro cuadrado, i éste será la mitad del cuadrado dado.

79. Unir dos cuadrados en uno solo *fig.* 44.

Es una verdad demostrada en jeometría que si sobre los tres lados de un triángulo rectángulo se construyen tres cuadrados, el de la hipotenusa tendrá una superficie igual a la suma de los cuadrados construidos sobre los catetos. Por consiguiente, para reunir los dos cuadrados representados por las rectas *m n*, se construirá el ángulo recto *A B C*, cuyos lados sean iguales a *m* i *n;* únase *A* con *C* i se tendrá la hipotenusa del triángulo rectángulo *A B C*; construyendo sobre *A C*, como lado, el cuadrado *A C D E*, éste tendrá una superficie igual a los dos cuadrados representados por las rectas *m* i *n*.

Para sumar tres o mas cuadrados en uno solo, se sumarán dos de ellos, i el resultado, por el mismo procedimiento, se reunirá con un tercero, etc.

80. Hallar la diferencia entre dos cuadrados: *fig.* 44.

Sea *A C D E* el cuadrado mayor i la recta *m* el lado del cuadrado que se quiere estraer de éste. Por el punto *r*, mitad de $A\ C$, i con la magnitud $A\,r$ trácese una semicircunferencia; aplíquese desde C hasta B la magnitud m. El cuadrado construido sobre el cateto $A\,B$ del triángulo rectángulo $A\ B\ C$ será la diferencia entre el cuadrado dado i el estraido.

CAPÍTULO V.

MAS DE CUATRO LÍNEAS RECTAS.

Polígonos.

81. Hemos llamado *polígono* (núm. 44) a una superficie plana terminada por líneas rectas denominadas *lados* del polígono: si el polígono consta de tres lados, hemos dicho que se llama *triángulo;* si se compone de cuatro lados, le hemos denominado *cuadrilátero*. Ahora añadiremos que se llama *pentágono* el polígono de cinco lados, *exágono* el de seis, *eptágono* el de siete, *octógono* el de ocho, *eneágono* el de nueve, *decágono* el de diez, *endecágono* el de once, *dodecágono* el de doce i *pentàdecágono* el de quince. Todos los demas se enuncian segun el número de lados que tienen: polígono de trece, de diez i siete, de cien lados etc.

82. Los polígonos se dividen en *regulares* e *irregulares:* se llama *polígono regular* el que tiene iguales todos sus lados i todos sus ángulos: *figs*. 45, 46, 47,.... 50: se denomina *polígono irregular* el que no reune estas dos circunstancias: *figs*. 58 i 59. El triángulo equilátero i el cuadrado son polígonos regulares: los demas triángulos i cuadriláteros son polígonos irregulares.

83. En todo polígono regular se llama *centro* un punto que dista igualmente de todos sus vértices, tal es el O del polígono $A\ B...F$: *fig*. 48. Las rectas $O\ A$, $O\ B$, $O\ C$ etc. que desde el centro van a parar a uno de los vértices del polígono, toman el nombre de *radios oblícuos;* las rectas que desde el centro se tiran perpendicularmente a los lados, como $O\ C$ se llaman *radios rectos;* el ángulo formado en

el centro del polígono por dos radios oblícuos inmediatos, como el *A O B*, se denomina *ángulo central;* i toma por fin el nombre de *ángulo esterno*, el que está formado por un lado del polígono i la prolongacion de su inmediato: tal es el *A B G*. Cuando dos polígonos regulares tienen un mismo centro i paralelos sus lados, se dice que son *concéntricos:* tales son los dos de la *fig.* 48.

84. Todo polígono regular puede ser *inscripto* o *circunscripto* a un círculo: se llama inscripto cuando todos los vértices se hallan sobre la circunferencia, i circunscripto cuando los lados del polígono toquen a la circunferencia. El cuadrado de la *fig.* 46, está inscripto en la circunferencia mayor i circunscripto a la menor.

85. El conocimiento de las siguientes propiedades con respecto de los polígonos lo creemos necesario para las artes.

1.° En un polígono que no sea triángulo, la igualdad de lados no supone la igualdad de ángulos i vice-versa, la igualdad de ángulos no arguye la igualdad de lados. Ejemplo de lo primero es el rombo, i de lo segundo el rectángulo.

2.° La suma de todos los ángulos de un polígono cualquiera vale tantas veces 180° como lados tiene el polígono ménos dos.

3.° En un polígono regular cualquiera se verifica: que los radios oblícuos son iguales entre sí i dividen por mitad los ángulos del polígono; que los radios rectos son tambien iguales i parten por mitad al lado correspondiente; que los ángulos centrales i los esternos son entre sí iguales, i la suma de los primeros lo mismo que de los segundos es igual a 360°: que los radios oblícuos parten en triángulos iguales el polígono, los cuales son equiláteros en el exágono e isóceles en los demas; que los radios rectos le dividen en trapezoídes iguales, ménos en el cuadrado que lo parten en cuatro cuadrados iguales etc.

4.° En todo polígono regular de número de lados par, los lados opuestos son paralelos, los vértices se hallan de dos en dos en rectas paralelas a la base, i las rectas que unen los puntos medios de los lados opuestos, pasan por el centro del polígono.

5.° En todo polígono regular de número impar de lados, todos los vértices, escepto el del ángulo opuesto a la base, se hallan tambien de dos en dos en rectas paralelas a esta base, i las rectas que salen de los vértices i pasan por el centro, son perpendiculares a los lados opuestos en su punto medio.

86. Para avaluar el número de grados de un ángulo interior de un polígono regular, se multiplica 180° por el número de lados que tenga el polígono ménos dos i se divide el producto por el número total de lados del polígono, el cociente será el número de grados del ángulo.

Siguiendo esta regla se hallará que el ángulo del triángulo equilátero es igual a........ 60°

Angulo del cuadrado................	90°
Ang. del pentágono....................	108°
Ang. del exágono......................	120°
Ang. del eptágono.....................	128° $\frac{4}{7}$
Ang. del octágono.....................	135°
Ang. del eneágono.....................	140°
Ang. del decágono.....................	144°
Ang. del endecágono................	147° $\frac{3}{11}$
Ang. del dodecágono................	150°

87. Para la construccion de los polígonos regulares en jeneral se hace uso de la circunferencia de círculo: se divide ésta en tantas partes iguales como lados debe tener el polígono; se une cada punto de division con sus puntos inmediatos i se tiene la figura que se pide.

88. Inscribir en un círculo un triángulo equilátero: *fig.* **45.**

Trácese el diámetro AB: con el radio de la circunferencia i desde A como centro córtese al círculo en C i D: uniendo estos puntos entre sí i con el punto B quedará trazado el triángulo equilátero pedido.

89. Inscribir en una circunferencia un cuadrado: *fig.* 46.

Bastará trazar dos diámetros perpendiculares i unir con rectas sus estremos.

90. Inscribir en una circunferencia un pentágono regular *fig.* 47.

Trácese el diámetro AB i en su centro O levántese el radio perpendicular OC; divídase el radio AO en dos partes iguales en m desde cuyo punto con el radio mC trácese el arco Cn: aplicando sobre la circunferencia la cuerda del arco Cn la dividirá en cinco partes iguales en los puntos E, F, G, C, H.

91. Inscribir en una circunferencia un exágono regular: *fig.* 48.

Bastará aplicar el radio de la circunferencia sobre ella para que la divida en seis partes iguales.

92. Inscribir en una circunferencia un eptágono regular: *fig.* 45.

Repítase la misma operacion que se hizo para trazar el triángulo equilátero. La recta CE mitad de CD será el lado del eptágono.

93. Inscribir en una circunferencia un eneágono regular: *fig.* 49.

Trácese el diámetro AB i prolónguese indefinídamente; tírese otro diámetro CD perpendicular al primero. Desde D como centro i con el radio de la circunferencia córtese a ésta en el punto n, i desde C, i con el radio Cn, córtese el diámetro prolongado en el punto E; por último desde E i con radio EC córtese el diámetro AB en F: AF dividirá a la circunferencia en nueve partes iguales.

94. Inscribir en un círculo un endecágono regular: *fig.* 50.

Trácense los dos diámetros perpendiculares *A B*, *C D*. Desde *D* i con el radio de la circunferencia córtese a ésta en el punto *m*, i desde *B* i con el mismo radio señálese el punto *F*: hágase centro en *m* i con el radio *m F* trácese el arco de círculo *F G*: la cuerda de este arco aplicada sobre la circunferencia, la dividirá en once partes iguales.

95. Dividiendo en dos partes iguales el arco que corresponde al lado de un polígono regular, la cuerda de uno de los nuevos arcos será el lado de un polígono de un número doble de lados: de manera que, conociendo el modo de inscribir en una circunferencia los polígonos de 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10 i 11 lados, conocemos tambien el modo de inscribir polígonos de un número de lados múltiplo de los citados.

96. Dividir una circunferencia en un número cualquiera de partes iguales: *fig.* 51.

Divídase el diámetro *A B* en tantas partes iguales (núm. 28) cuantas sean las en que se quiere dividir la circunferencia: desde *A* i *B* como centros i con el diámetro como radio fórmese la interseccion de arcos *C*; únase este último punto con el segundo punto de division, i prolónguese la recta hasta cortar la circunferencia en el punto *D*. La cuerda *A D* dividirá la circunferencia en tantas partes iguales cuantas sean aquellas en que se haya dividido el diámetro.

La *fig.* 51 representa una circunferencia dividida en 13 partes iguales por el sistema que acabamos de indicar.

97. Construir un exágono regular de modo que dos de sus lados se hallen sobre dos lados de un rectángulo: *fig* 52.

Sea dado el rectángulo *m n o p:* tírense las rectas *s t*, *q r* que dividan en cuatro partes iguales el rectángulo; desde *i* como centro i con un radio cualquiera, descríbase una circunferencia que corte a la *s t* en el punto *z* i desde este punto i con el mismo radio córtese la circunferencia en el punto *u*; únase *i* con *u* i prolónguese la recta hasta cortar a la *op* en *A*: *A i* será el lado que aplicado desde *A* a *B*, de *B* a *C*, de *C* a *D*, de *D* a *E*, de *E* a *F* i de *F* a *A* nos dará el exágono pedido, tirando las rectas correspondientes.

98. Inscribir un octógono regular en un cuadrado: *fig.* 53.

Desde los vértices *A*, *B*, *C*, *D* del cuadrado como centros i con la mitad de la diagonal como radio, córtense los lados en los puntos *m*, *n*, *o*, *p*, *q*, *r*, *s*, *t*: uniendo cada punto con los inmediatos nos resultará el octógono pedido.

99. Sobre un lado dado construir un pentágono regular: *fig.* 54.

Sea *A B* el lado dado: desde *A* como centro i con *A B* por radio descríbase el arco indefinido *B m*: por el punto *A* levántese la perpendicular *A C*: divídase el cuadrante *C B* en cinco partes iguales (núm. 40) en 1, 2, 3 i 4 i una de ellas llévese desde *C* hasta *F*: hágase *A B D* igual a *B A F*, i por último desde *D* i *F* como centros i con *A B* por radio hágase la interseccion *E*: uniendo entre sí, por medio de rectas, los puntos *A*, *F*, *E*, *D* i *B* se tendrá trazado el pentágono pedido.

Const. 2.ª En el estremo *A* levántese la *A C* perpendicular a la *A B* e igual a ella; divídase por mitad en *n* dicha recta i desde este punto con el radio *n C* trácese el arco *C m*. Con el radio *B m* desde *A* i *B* hágase la interseccion de arcos *E*, i este punto será otro de los vértices del polígono pedido. Por último, desde *A* i *B* con un radio *A B* trácense dos arcos que se cortarán en *D* i *F* con otros arcos trazados desde *E* con el mismo radio. La figura *A B D E F* será el pentágono pedido.

100. Sobre un lado dado construir un exágono regular: *fig.* 55.

Trazando una circunferencia con el lado dado *A B*, éste la dividirá en seis partes iguales.

101. Sobre un lado dado construir cualquier polígono regular desde el exágono hasta el dodecágono: *fig.* 56.

Por el punto O, medio del lado dado AB, levántese una perpendicular indefinida: desde A como centro i con AB como radio descríbase el arco BC i divídase éste en seis partes iguales en los puntos 1, 2, 3, 4 i 5.

Tómese de las divisiones del arco BC tantas, cuantos lados tiene el polígono mas de seis, i llévense desde C sobre la perpendicular. El punto que resulte será el centro, i la distancia de dicho punto a cualquiera de los estremos del lado dado será el radio para trazar una circunferencia que AB dividirá en tantas partes iguales cuantas sean las que se tomaron de las seis divisiones mas seis. De manera que si con el centro D i el radio DA se trazara una circunferencia, el lado AB la dividiria en siete partes iguales: haciendo la misma operacion con el centro E i el radio EA; AB dividiria la circunferencia en nueve partes iguales etc.

102. Sobre un lado dado construir un polígono regular desde el de 12 hasta él de 24 lados: *fig.* 57.

Trácese como en la figura anterior una perpendicular por medio del lado dado i el arco CB que se dividirá en doce partes iguales: véase cuantos lados mas de doce tiene el polígono que se quiere construir i tómese del arco CB un número de partes iguales a dicho excedente, i éstas partes pásense desde C sobre la perpendicular: por ejemplo, para construir un pentadecágono, como este tiene tres lados mas de doce, tomaremos la cuerda de tres divisiones del arco CB, i las llevaremos desde C hasta D; tómese la distancia DA i pásese de D a F: si con FA como radio se traza una circunferencia, AB la dividirá en quince partes iguales.

103. Hacer un polígono irregular igual a otro: *fig.* 58.

Descompóngase el polígono $ABCDE$ en triángulos trazando por el vértice A a los demas vértices, diagonales: el problema queda reducido a copiar triángulos. (núm. 55.)

104. Dado un polígono regular cualquiera, por ejemplo el exágono $A\,B\,C\,D\,E\,F$ *fig.* 48, **trazar otro polígono concéntrico, cuyos lados sean iguales a la recta** r.

Divídase por mitad en C el lado $A\,F$ i tírense todos los radios oblícuos $O\,A$, $O\,B$, etc. Hágase $C\,m$ igual $1/_2\,r$ i en m levántese $m\,n$ perpendicular a $A\,F$, hasta que corte en n el radio oblícuo $O\,A$, prolongado si fuera necesario. Con el radio $O\,n$ descríbase una circunferencia, la cual cortará todos los radios oblícuos, i los puntos de interseccion serán los vértices de otro polígono regular concéntrico con el propuesto.

Si r fuese mayor que el lado $A\,B$ del polígono propuesto, de modo que colocando $1/_2\,r$ sobre la prolongacion de dicho lado nos diera $C\,z$, en z se le tiraria por abajo la perpendicular $z\,x$ hasta encontrar en x el radio oblícuo $O\,A$ prolongado; i prolongando en seguida los demas radios oblícuos, la circunferencia trazada desde O con el radio $O\,x$, cortaría estas líneas en puntos que serian los vértices del polígono concéntrico pedido.

105. Construir un polígono semejante al propuesto $a\,b\,c\,d\,e$ **de modo que** $a\,m$ **corresponda al lado** $a\,c$: *fig.* 60.

Por el vértice a tírense diagonales a los demas, i por el punto m trácese una paralela al lado $d\,e$ hasta cortar la diagonal $a\,d$ en n; por este punto tírese una paralela al lado $d\,c$ hasta cortar la diagonal $a\,c$ en o; por este punto tírese una paralela a $b\,c$ hasta cortar en e' al lado $a\,b$: el polígono $a\,m\,n\,o\,e'$ será semejante al polígono propuesto i reducido a una proporcion dada.

Tambien se puede copiar un polígono irregular semejante a otro, trazando desde un punto tomado arbitrariamente en el interior, rectas a todos los vértices del polígono propuesto, i en seguida construir un segundo polígono cuyos lados sean paralelos a los lados del primero: la *fig.* 61 esplica suficientemente la operacion que acabamos de indicar.

Para copiar polígonos regulares semejantes, podemos valernos de estos mismos métodos, o bien reducir la circunferencia que circunscribe al polígono a la dimension a que se quiere reducir el polígono por trazarse.

106. **Transformar un triángulo en un rectángulo equivalente i cuya altura sea la mitad de la del triángulo:** *fig.* 62.

Sea *A B C* el triángulo que se quiere transformar en un rectángulo; a la mitad de su altura *m* tírese la recta *r s* paralela a la base, i por los puntos *A* i *B* levántense las perpendiculares *B D*. *A E* que completarán el rectángulo *A B D E*, equivalente al triángulo propuesto.

107. **Transformar el rectángulo** *A B C D* **en un cuadrado equivalente:** *fig.* 63.

Prolónguese el lado *A B* i colóquese de *A* hasta *E* una magnitud igual a *A D*. Desde *m*, mitad de *B E*, como centro, i con *m E* por radio, descríbase una semicircunferencia; el lado *A D* prolongado hasta encontrarse en *F* con el semicírculo será el lado del cuadrado *A F G H* equivalente al rectángulo propuesto.

CAPÍTULO VI.

DE LAS CURVAS.

108. Infinitas son las curvas que se pueden emplear en el dibujo, pero nos limitaremos a la construccion de las mas útiles i que por su regularidad ofrecen sistemas mas fáciles para su trazado: tales son *la circunferencia de círculo, la ojiva, la elipse, el óvalo, el ovoide, la ondulosa, la espiral, la parábola i la hélice.*

DE LA CIRCUNFERENCIA.

Ya se ha visto como se trazan las circunferencias grandes i chicas i como se dividen en partes iguales.

109. **Dada una circunferencia determinar su centro:** *fig.* 64.

Tómese sobre la circunferencia dada, tres puntos arbitrarios, tales como *A*, *B*, *C*, i por el medio de los arcos *A B*, *B C* bájense perpendiculares a sus cuerdas hasta encontrarse en el punto *D*, i éste será el centro de la circunferencia.

Por esta misma operacion se puede hacer que pase una circunferencia por tres puntos que no estén colocados en línea recta.

110. **Trazar una circunferencia sin valerse del compas:** *fig.* 65.

Sea *A B* el diámetro; por el punto *A* tírense las rectas arbitrarias *A* 1, *A* 2, *A* 3 etc., i por el punto *B* tírense perpendiculares a cada una de dichas rectas; los ángulos *a*, *b*, *c*, *d* etc. serán otros tantos puntos por donde deberá pasar la circunferencia. Hágase la misma operacion por la parte inferior. Es escusado decir que miéntras mas puntos se determinen, mas fácil será el trazado de la circunferencia.

111. Una recta es *tanjente* a una circunferencia cuando toca a ésta en un solo punto: este punto se llama de *contacto*. Una tanjente es siempre perpendicular al radio que termina en el punto de contacto.

112. *Secante* se llama una recta que corta la circunferencia en dos puntos i sobresalen sus estremos.

113. *Segmento* es la parte del círculo comprendida por un arco cualquiera i su respectiva cuerda.

114. *Sector* se llama el espacio comprendido por dos radios i su respectivo arco.

115. Por el punto *A* tirar una tanjente a la circunferencia: *fig.* 66.

Únase el punto de contacto *A* con el centro *O* de la circunferencia; trazando por *A* una perpendicular al radio *A O* ésta será la tanjente pedida (núm. 26.)

116. Por un punto dado fuera de una circunferencia tirar una o dos tanjentes al círculo: *fig.* 67.

Sea *D* el punto dado; únase *D* con *O* i divídase *D O* en dos partes iguales en *E;* desde *E* como centro i con *E O* como radio, córtese a la circunferencia en los puntos *A* i *B* que serán los dos puntos de contacto, uniendo los cuales con el punto *D* quedarán trazadas las tanjentes.

117 Inscribir una circunferencia en el triángulo *A B C: fig.* 68.

Divídase en dos partes iguales dos de los ángulos del triángulo, *A B* por ejemplo (núm. 40); el punto *D* en que se cortan las rectas de division será el centro del círculo pedido, i la perpendicular bajada desde el centro a cualquiera de los lados del triángulo será su radio, tal como *D E*.

DE LA OJIVA.

118. Se llama *ojiva* a una figura cuyas ramas simétricas están formadas por dos arcos de círculo i tiene por base una recta.

119. Dibujar una ojiva: *fig.* 69.

Sea *A B* la base; en su medio *m* levántese una perpendicular i sobre ella aplíquese la altura *m C:* únase *C* con *A* i *B*; i en el medio de las rectas de union tírense perpendiculares a éstas hasta encontrarse con la base prolongada si es necesario: los puntos *n* i *o* serán los centros, i *n C* el radio para trazar los arcos de círculo *A C*, *C B*.

DE LA ELIPSE.

120. De todas las curvas, despues de la circunferencia de círculo, la *elipse* es la que mas interesa a las artes. Para

darla a conocer imajinémonos una curva cerrada $A\,B\,C\,D$: (*fig*, 70), simétrica en dos sentidos i mas largo que ancho el espacio plano cerrado por ella. Concibamos tiradas dos rectas $A\,B$, $C\,D$ perpendiculares entre sí i divididas mutuamente por mitad en O. Este punto será el *centro* de la curva que consideramos, i las rectas $A\,B$, $C\,D$ sus ejes de simetría, que llamaremos simplemente *eje mayor* i *eje menor* de la elipse. Ademas, si con el semi-eje mayor $A\,O$ como radio i desde C como centro, se traza el arco $F\,F'$, estos dos puntos serán los *focos*. Ahora si por un punto cualquiera, tomado sobre la elipse, como G, H, se tiran rectas a los focos, tomarán éstas el nombre de *radios victores*, i si se verifica para todos los puntos, que la suma de los radios victores sea igual al eje mayor, la curva considerada será una elipse.

121. Determinar los puntos por donde debe pasar una elipse: *fig*. 71.

Sol. 1.ª—Determinados los ejes $A\,B$, $C\,D$ i los focos $F\,F'$, tómese arbitrariamente un punto s comprendido entre un foco i el centro: desde F como centro i con el radio $A\,s$, i desde F' i con $B\,s$ fórmese la interseccion P. El punto P pertenece a la elipse pedida; del mismo modo se determinarán otros puntos, procurando que la suma de los radios de los arcos que se tracen desde los focos para cada punto de interseccion sea igual al eje mayor. Siendo ejes de simetría los dos de la elipse, la operacion que nos dá un punto P, nos dará igualmente otros tres puntos P', M i M'.

122. Sol. 2.ª *fig*. 72.—Tómese una tira de papel $M\,N$, i a partir de su estremo M márquense en su canto las distancias $M\,x$, igual a la mitad del eje menor i $M\,z$, igual a la mitad del eje mayor. Colóquese la tira sobre el plano de modo que el punto x caiga sobre el eje mayor i el punto z sobre el menor, prolongado si fuera necesario. En esta posicion el estremo de la tira determinará un punto M co-

rrespondiente a la elipse. Jirando la tira, pero de modo que los puntos x i z se hallen constantemente sobre los ejes de la manera indicada, el estremo de la tira irá ofreciendo otros puntos por donde deberá trazarse la elipse pedida.

123. Trazar una elipse por un movimiento contínuo: *fig.* 73.

Determinados los ejes i los focos, se tomará una cuerda de una dimension igual al eje mayor AB; sujétense sus estremos en los focos; póngasele luego bien tirante por medio de un lápiz o punzon, i teniéndola constantemente en esta disposicion, hágase correr el punzon o el lápiz sobre el plano, hasta volver al punto de partida, i se tendrá trazada una elipse.

124. Hallar el centro i los ejes de una elipse: *fig.* 74.

Sea $A\,B\,C\,D$ la elipse dada; tírense en ella dos rectas paralelas, tales como mn, op i divídase cada una en dos partes iguales en E i F; únanse estos puntos de division; prolónguese la recta hasta tocar con sus estremos a la elipse: el punto O, medio de esta recta, será el centro de la elipse. Para hallar los ejes se hará centro en O, i con un radio conveniente se trazarán dos arcos que corten a la elipse en r, s, desde cuyos puntos como centros, i con un radio cualquiera, se formará la interseccion t; uniendo t con el centro O por una recta que se prolongará hasta cortar a la elipse, se tendrá el eje mayor $A\,B$; i $C\,D$ perpendicular a éste i que pase por el centro, será el menor.

DEL ÓVALO.

125. La dificultad de obtener una elipse bien dibujada sea que se quiera trazarla por medio de puntos o bien por un movimiento contínuo, principalmente cuando se ofrece determinarla en pequeña dimension, ha hecho imajinar varias construcciones que permiten describir por medio de

arcos de círculo, curvas que no se diferencian sensiblemente de la elipse. Estas curvas toman el nombre de *óvalo*.

Se distinguen dos clases de óvalos; él en que se da conocido un solo eje i el óvalo, en que se dan conocido los dos. El primero se subdivide en *regular* i *prolongado*.

126. Construir un óvalo regular: *fig.* 75.

Trácese la recta *A B* que dividiremos en tres partes iguales en los puntos *C. D*, desde los cuales como centros i con un radio igual a *A C* trácense dos circunferencias que se cortarán en los puntos *m n*; desde *A* i *B* con el mismo radio córtense las circunferencias en los puntos *r*, *u*, *t*, *s:* en seguida hágase centro en *m* i *n* i con el radio *A D* trácense los arcos *t r* i *s u*, con lo cual quedará terminado el óvalo regular.

127. Construir un óvalo prolongado: *fig.* 76.

Dividiremos la recta *A B* en cuatro partes iguales en los puntos *C*, *D*, *E:* desde los puntos *C* i *E* i con el radio *A C* descríbanse dos circunferencias tanjentes en *D*. Con el mismo radio i desde *A* i *B* córtense las circunferencias en los puntos *m*, *p*, *n*, *o:* tómese un radio igual a *A E* i con los centros *m*, *o*, hágase la interseccion *r*, i con el mismo radio i los centros *n p* hágase la interseccion *s*, desde cuyos puntos como centros i con el mismo radio trácense los arcos *o m*, *n p*.

128. Trazar un óvalo en que se nos dan conocidos los dos ejes: *fig.* 77.

Sol. 1.ª—Sea *A B* el eje mayor i *C D* el menor que se corten perpendicularmente en el punto *E;* tómese *C E* i colóquese desde *A* a *O* i divídase la distancia *O E* en tres partes iguales; trasládese una de ellas de *O* a *I:* hágase centro sucesivamente en *A* i en *I*, i con el radio *A I* descríbanse los dos arcos de círculo *G A F*, *G I F:* repítase la misma operacion en *B* i desde los puntos *F* i *H* como centros i con el radio *F H* fórmese la interseccion *m*, i con el mismo radio i con los centros *G L* hágase la interseccion *n*, desde cuyos puntos, i siempre con el mismo radio, trácense los arcos *F G H*, *G D L* i quedará trazado el óvalo pedido.

129. *Fg.* 78. Sol. 2.ª Determinados los dos ejes *A B*, *C D* i el centro *E*, sobre la mitad del eje mayor, fórmese el triángulo equilátero *E B F*, i con la distancia *C E* se determinará el punto *e* sobre el lado *E F* del triángulo; únase *C* con *e* con una recta que se prolongará hasta cortar el otro lado del triángulo en *a* i con la distancia *B a*, se determinará el punto *b*; por éste i por el punto *a* se trazará una recta que en su interseccion con el eje menor, prolongado si fuera necesario, determinará el punto *G*. El punto *b* será el centro para trazar el arco *a B f*, i el punto *G* será el otro centro para trazar el arco *a C a'*. Siendo la figura simétrica en dos sentidos, creo inútil demostrar como se determinan los centros *b'* i *H* para trazar los demas arcos que completan la figura pedida.

DEL OVOIDE.

130. Se da el nombre *ovoide* a una curva cerrada cuya forma se aproxima a la seccion de un huevo que pase por sus puntos mas distantes.

131. Dibujar un ovoide conocido su eje *A B*: *fig.* 79.

Divídase el eje en dos partes iguales en *O*, i por este punto levántese una perpendicular indefinida: descríbase con el centro *O* i el radio *A O* la circunferencia *A B C D:* tírense las *B m* i *A n* que pasen por el punto *D*. Desde *A* i *B* como centros i con el radio *A B*, descríbanse los arcos *A E*, *B F*, i de desde *D* i con el radio *D E* trácese el arco *E F* con lo cual quedará trazado el ovoide.

CURVA ONDULOSA.

132. Esta curva no está sujeta a dimensiones ni a formas fijas, siendo que los dos arcos de círculo que la for-

man pueden ser iguales o desiguales i su inflexion puede ser mayor o menor segun el radio que se emplee para trazar los arcos. La mas usada es la siguiente:

133. Dibujar una ondulosa: *fig.* 80.

Sea *A B* la lonjitud que se quiere dar a la curva, i *A C* su altura: desde *D* medio de *A B*, i *A* como centros i con el radio *A D*, hágase la interseccion *m*; i con los centros *D B* i el mismo radio, la otra interseccion *n*: con *m* i *n* como centros i siempre con el mismo radio, trácense los arcos *A D*, *D B* i quedará trazada la curva. En este caso la curva es simétrica, pero se puede modificarla en distintos sentidos, como la que resulta de trazar el arco *D E* con el centro *O*.

DE LA ESPIRAL.

134. La *espiral* es una curva cuyos puntos se aproximan constantemente a un punto situado en el centro. Hai muchas clases de espirales, pero nosotros trataremos solo de la *voluta* por ser la mas útil en las artes. Esta consta de dos curvas que al mismo tiempo que se van aproximando al centro, se aproximan constantemente la una a la otra.

135. Dibujar una voluta: *fig.* 81.

Sea la recta *A B* la *altura* o *cateto* que debe tener la voluta: divídase ésta en 16 partes iguales, desde el 9º punto de division como centro i con un radio igual a una de estas partes descríbase una circunferencia de círculo, que llamaremos *ojo de la voluta*, i en ella trácese un cuadrado como está indicado en la figura; divídase éste en cuatro partes iguales con las rectas 1 3, 2 4 i cada una de ellas en seis partes iguales en los puntos 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 i 12. Los puntos 1, 2, 3.... serán los centros progresivos para trazar la espiral, que se emplearán del modo siguiente: con la distancia 1 *M* como radio i desde 1 como centro, descríbase el primer cuadrante que empiece en *M* i termine en *E*; desde el punto 2 i con el radio 2 *E*, trácese el segundo cuadrante que tendrá su oríjen en *E* i acabará en *N*; desde 3 i con 3 *N*, el tercer cuadrante; i así sucesivamente hasta completar la primera revolucion en el punto *C*. Cada cuadrante deberá empezar en donde haya concluido el anterior i terminar en la recta vertical u horizontal tirada desde su centro.

En cuanto a la curva interior se describe absolutamente del mismo modo, alejando cada centro una cuarta parte de una division. El centro del primer cuadrante deberá hallarse inmediato al número 1, i su radio alcanzará hasta el número 1 de las divisiones del cateto; el segundo cerca del número 2 i así sucesivamente usando los centros en el órden numérico en que están colocados.

En la *fig.* 82 están señalados gradualmente los centros tanto de la curva esterior como de la interior.

136. Copiar una curva cualquiera: *fig.* 83.

Tómese sobre la curva dada cierto número de puntos como *A*, *B*, *C*, *D*, *E* que indiquen las inflexiones mas notables: tírese la recta *A E'* i sobre ella bájense las perpendiculares *B b*, *C c*, *D d*, *E E'*. Trácese la recta *A E'*: *fig.* 83 *bis*, igual a la *A E'*: *fig.* 83 sobre la cual se marcarán las divisiones *b'*, *c'*, *d'* de la *fig.* 83 i por cada uno de ellos i el punto *E'* levántense perpendiculares (núm 24), sobre las cuales se marcarán las alturas *b' B'*, *c' C'*, *d' D'* i *E' E* iguales a las *b B*, *c C*, *d D* i *E' E* haciendo pasar una curva por los puntos *A'*, *B'*. *C'*, *D'*, *E* se tendrá reproducida la curva dada.

137. Para trazar figuras iguales, a mas de los métodos jeométricos que conocemos, se emplean otros mui variados. Si se coloca una figura sobre un papel o cualquiera otra superficie, i se señalan todos sus contornos, se tendrá una figura igual a otra por el método de *sobreposicion*.

138. Para hacer un dibujo igual a otro se suele poner

un papel transparente encima del dibujo i trazar sobre él con lápiz o tinta todos los contornos del dibujo: a este método llaman *calcar*.

139. Tambien se puede copiar un dibujo empleando la *cuadrícula*. Este método consiste en trazar sobre el dibujo que se quiere copiar, tantas horizontales i verticales que formen unos pequeños cuadritos, i trazar sobre el papel otros tantos cuadritos iguales. Con esta preparacion será fácil copiar las partes del dibujo contenidas en cada cuadrito. Si no se quiere estropear el dibujo, se pueden formar sobre él los cuadritos por medio de hilos. Si se quiere copiar el dibujo en mayores o menores dimensiones, se trazarán sobre el papel cuadritos mayores o menores de los del dibujo.

140. Se puede tambien hacer un dibujo igual o semejante a otro por medio de la escala. Este sistema consiste en dividir una línea en partes iguales mui pequeñas con las cuales se miden las partes de que consta el dibujo para trazarlas en el papel. Tirando otra línea mayor o menor que la primera i dividiéndola en un número igual de partes, si medimos las distintas partes del dibujo con la primera escala, i de las partes que resulta tomamos otras tantas en la otra, el dibujo que nos resultará será un dibujo semejante: a este sistema se llama copiar un dibujo *en mayor o menor escala*.

CAPÍTULO VII.

DE LOS SÓLIDOS.

141. En las figuras que hemos enseñado a trazar hasta ahora, se han considerado todas sus líneas comprendidas sobre superficie plana; hasta aquí nos hemos ocupado del dibujo de las caras de los cuerpos, consideradas aisladamente, es decir, sin relacion al espacio o estension limitada por dichas caras. Ahora nos proponemos dar a conocer los medios de que puede echar mano el arte para re-

presentar tales como son los diferentes *cuerpos sólidos* sujetos a ciertas formas determinadas.

142. *Sólido o cuerpo* es un objeto cualquiera, una forma material i palpable que tiene tres dimensiones; *largo o lonjitud, ancho o latitud* i *grueso o espesor.*

143. De los diferentes cuerpos que nos presenta la naturaleza o que puede la mano del hombre elaborar, solo trataremos de los que con frecuencia tienen aplicacion en las artes: tales son la *pirámide*, el *prisma*, el *cono*, el *cilindro* i la *esfera*.

DE LA PIRÁMIDE.

144. Se llama *pirámide* a un sólido que tiene por base un polígono cualquiera, de cuyos ángulos salen unas rectas llamadas *aristas* que se reunen todas en un punto llamado *vértice* o *cúspide*, i forman éstas con el lado de la base, unos triángulos que se denominan *caras* o *faces* de la pirámide.

Se da el nombre de *altura* a la perpendicular bajada desde la cúspide a la base: cuando la altura cae en el centro de la base la pirámide es *recta*, i cuando la altura cae afuera del centro es *oblícua*.

145. Las pirámides se dividen en *regulares* e *irregulares:* regular es la pirámide que tiene por base un polígono regular, i pirámide irregular es la que tiene por base un polígono irregular.

En toda pirámide regular se llama *apotema* la recta que desde la cúspide va a parar al punto medio de uno de los lados de la base.

146. Una pirámide toma su nombre del polígono que sirve de base; así se llamará pirámide *triangular* cuando la base es un triángulo; *cuadrangular*, *pentagonal*, cuando es un cuadrado o un pentágono etc. Las caras de una pirámide regular son siempre triángulos isósceles iguales entre sí.

147. Trazar las pirámides regulares, triangular, cuandrangular i pentagonal: *figs.* 84, 85 i 86.

Aun cuando se ha dicho que la base de una pirámide regular es siempre un polígono regular, sin embargo, en el dibujo no se puede representar sino por medio de un polígono irregular, pero en la suposicion de que todos sus lados sean iguales.

Trácense las bases como se ve en sus respectivas figuras: hállense los centros *o* de cada una, i sobre ellos levántense las verticales *o D*, *o E*, *o F* que se supondrán ser las alturas de las pirámides: *D, E*, *F* serán los vértices que unidos por rectas a los ángulos de sus respectivas bases, nos darán las pirámides pedidas.

Para hallar el centro de la base de una pirámide regular, se procederá del modo siguiente: si el polígono que sirve de base tiene un número par de lados, se unirán dos vértices cualesquiera con sus vértices opuestos i el punto de interseccion será el centro; si el polígono tuviera un número impar de lados, se unirán dos de sus vértices con sus lados opuestos i el punto de interseccion será el centro.

148. *Fig.* 85. **Cortar una pirámide por un plano paralelo a la base.**

Tómese un punto *m* sobre una de las aristas i por este punto tírense las rectas *m n*, *n o*, *o p*, i *p m* paralelas a los lados del polígono de la base. El polígono *m n o p* cortará a la pirámide *A B Ç D E* con un plano paralelo a su base.

DEL PRISMA.

149. Llámase *prisma* a un sólido que tiene por *bases* dos polígonos iguales i paralelos, i una série de paralelógramos en número igual al de los lados de cada uno de dichos polígonos. Los paralelógramos se llaman *caras laterales*, i toman tambien la denominacion de *laterales* las aristas que en estas caras tienen sus estremos en las dos bases del cuerpo. La *altura* de un prisma es la perpendicular tira-

da a una base o a su prolongacion desde un punto de la otra base, como *b m* en la *fig.* 88.

150. Se llama *prisma regular* cuando las bases son polígonos regulares i las aristas perpendiculares a sus bases; si las aristas fueran oblícuas a las bases el prisma se llama *oblícuo*.

151. Los prismas toman nombres particulares segun el número de lados de que consta cada una de sus bases: así se llaman *triangulares*, *cuadrangulares*, *pentagonales* etc. conforme sean sus bases triángulos, cuadrados, pentágonos etc.: cuando un prisma tiene por bases paralelógramos toma el nombre de *paralelipípedo*, i si las bases, lo mismo que las caras laterales son cuadrados, el paralelipípedo se llama *cubo*.

152. Dibujar un prisma regular exagonal: *fig* 87.

Se dirá de las bases de los prismas regulares lo que se dijo de las bases de las pirámides regulares. Trácese un pentágono, como *A B C D E F* que supondremos regular, i por sus vértices levántense perpendiculares a la base; córtense éstas a una altura igual a la que se quiere dar al prisma, i por los puntos *a*, *b*, *c*, *d*, *e* i *f* trácese otro pentágono que saldrá igual i paralelo al de la base inferior. La *fig.* 88 representa un *prisma exagonal oblicuo*, i se trazará del mismo modo que la figura anterior, solamente que a las aristas se les dará la inclinacion que debe tener el prisma: las dos bases siempre serán iguales i paralelas.

153. Dibujar un paralelipípedo rectangular: *fig.* 89.

Trácese la base *A B C D* que supondremos un cuadrado: por cada vértice levántense las perpendiculares al cuadrado *A a*, *B b*, *C c* i *D d* i por sus estremos fórmese la base superior igual a la inferior. La base *a′ b′ c′ d′* con la *A B C D* forma un cubo.

DEL CILINDRO.

154. Se llama *cilindro* un cuerpo cuyas dos *bases* son dos círculos i tal que si en cualquiera parte se le da un corte paralelo a sus bases, las nuevas superficies que resultan serán tambien dos círculos. En todo cilindro se llama *eje* la recta *o o* que une los centros de sus dos bases, i toma el nombre de *altura* la perpendicular a una base o a su prolongacion desde un punto de la otra base *b m*: *fig.* 91.

155. Los cilindros se dividen tambien en *rectos* i *oblícuos*. Recto es el que tiene el eje perpendicular a las bases, i oblícuo el que tiene oblícuo su eje a las bases.

156. **Trazar un cilindro recto:** *fig.* 90.

Las bases de un cilindro, como ya se ha dicho, son círculos, pero en el dibujo se representan con elipses. Trácese pues la elipse *A B C D* que será la base inferior; por los estremos del eje *A B* i su centro *o*, levántense las perpendiculares al eje, *A a*, *B b*, *O o*, i a una altura conveniente se dibujará otra elipse igual i paralela a la de la base inferior, i el cilindro pedido quedará trazado.

157. **Trazar un cilindro oblícuo:** *fig.* 91.

Se trazará como en la figura anterior la elipse de la base inferior, i sobre los estremos i el centro del eje mayor en lugar de levantar verticales, tírense las oblícuas, paralelas entre sí *A a*, *O o* i *B b* i de igual magnitud: la recta *a o b* que une los estremos de las rectas será el eje para trazar una elipse igual i paralela a la que nos sirvió de base inferior.

DEL CONO.

158. Se llama *cono* al cuerpo enjendrado por el movimiento de una recta sujeta a pasar por un mismo punto i a recorrer con su estremo los diversos puntos de una circunferencia, al punto fijo se llama *vértice* o *cúspide*, i al plano circular *base*: *eje* es la recta que une el vértice con

el centro de la base i cuando el eje es perpendicular a la base el cono es *recto*, i cuando no lo es el cono es *oblícuo*: se llama altura de un cono la recta tirada perpendicularmente a la base o a su prolongacion desde el vértice del mismo cono, como *D E* en la *fig.* 93.

159. Trazar un cono recto: *fig.* 92.

Trazada la elipse que ha de servir de base i que se supone un círculo, por el punto *C* centro de la base, levántese la *CD* perpendicular al eje de la elipse. *D* será la cúspide del cono i todas las rectas que por este punto se tiren a la circunferencia serán otras tantas *aristas* del cono e iguales entre sí.

160. Trazar un cono oblicuo: *fig.* 93.

El trazado de este cono es igual al de la figura anterior, con la diferencia de que el eje se trazará oblícuamente a la base.

DE LA ESFERA.

161. La *esfera* es un cuerpo perfectamente redondo en todo sentido i enjendrado por una semicircunferencia que jira en torno de su diámetro: el diámetro toma en este caso el nombre de *eje*, i sus estremos se llaman *polos*.

162. En una esfera se consideran varios círculos que nos interesa conocer, tales son: los *círculos máximos*, los *círculos menores*, los *meridianos*, el *ecuador* i los *paralelos*.

163. Se llaman *círculos máximos* a todo círculo que se obtiene cortando la esfera por un plano que pase por el centro. *Menores* o *paralelos*, a todo círculo que resulte cortando la esfera por un plano que no pase por el centro i paralelo al ecuador. *Ecuador* es el círculo máximo que es perpendicular al eje. *Meridianos* son los círculos máximos que pasan por los polos.

164. *Casquete* de una esfera se llama la menor de las dos superficies en que queda dividida la esfera por un plano que la corta sin pasar por su centro: la seccion

ocasionada por el plano que determina el casquete esférico es un círculo menor que toma el nombre de *base* del casquete, i llámase *altura* de un casquete la porcion de radio de la esfera comprendida entre el centro de la base de dicho casquete i su superficie.

Segmento esférico es el espacio limitado por un casquete i su base.

Sector esférico es el espacio limitado por un casquete i la superficie de un cono recto que tiene su vértice en el centro de la esfera, i su base es la del mismo casquete.

165. Trazar una esfera i dibujar en ella el ecuador, los círculos máximos i los paralelos: *fig.* **94.**

Trácese la circunferencia $A\ B\ C\ D$ i los dos diámetros perpendiculares entre sí $A\ B$, $C\ D$: divídase cada diámetro en un número de partes iguales en, 10 por ejemplo, i divídase en igual número de partes iguales cada semicircunferencia en los pnntos a, b, c.... etc. El problema queda reducido a hacer pasar arcos de círculo por tres puntos que no estén en línea recta (núm 109): los arcos $a\ 1\ a$, $b\ 2\ b$, $c\ 3\ c$ etc. espresarán los círculos paralelos, i los arcos $C\ 1\ D$. $C\ 2\ D$, $C\ 3\ D$ etc. serán los meridianos: el diámetro $A\ B$ indica el ecuador, i el $C\ D$ el círculo máximo perpendicular al ecuador: $C\ D$ serán los dos polos.

Téngase presente que los dos diámetros i cada uno de los arcos representan semicircunferencias.

CAPÍTULO VIII.

MEDICION DE LAS SUPERFICIES.

166. Medir una superficie, es averiguar las veces que contiene otra superficie tomada por unidad: la unidad de medida para las superficies de grande estension es la *cuad. a*, i para las pequeñas es la *vara*, el *pié* i el *metro*.

Una cuadra tiene de lonjitud			150	vs. i	22,500	varas cuadradas.
Una vara	»	»	»	3	piés i	9	piés cuadrados.
Un pié	»	»	»	12	pulg. i	144	pulgadas cuad.
Una pulg.	»	»	»	12	lín. i	144	líneas cuadrad.
Una cuadra	»	»	»	125,4	met. i	15,725,16	mets. cuadrados.
Un metro	»	»	»	10	dec. i	100	decimt. cuadrad.
Un decím.	»	»	»	10	cent. i	100	centímt. cuad,
Un centímt.	»	»	»	10	mil. i	100	milímt. cuadrad.

Jeneralmente un dibujo no tiene las verdaderas dimensiones de la superficie que representa, pero sí la misma forma. En estos casos las figuras se trazan por medio de *escalas.*

167. Se llama escala a una línea dividida en partes iguales, cada una de las cuales representa una unidad de medida cualquiera, como una cuadra, un metro, una vara etc.: cada division se subdivide en partes mas pequeñas segun el jénero de medida a que se refiere.

168. A veces las subdivisiones necesitan a su vez ser subdividas; en este caso el método de subdividir una parte, a menudo ya demasiado pequeña, en un número considerable de partes, daria lugar a que se confundiesen los signos de division. Para evitar tal inconveniente se hace uso del sistema que esplicaremos en la *fig.* 95. Representa ésta una vara dividida en tres piés en los puntos *B*, 1, 2 el pié en doce pulgadas, en los núm. 1, 2, 3, etc. i la pulgada en doce líneas. En lugar de dividir cada pulgada en doce líneas, se traza a la recta *A E* una paralela a una distancia arbitraria, como la *C F* por ejemplo, i por los puntos 1, 2. 3, etc. tírense paralelas a la *B D:* divídase tambien *A C* en doce partes iguales i por cada punto de division tírense paralelas por toda la escala a la *A E:* trazando ahora las trasversales quedará terminada la escala. Si se quiere tomar, por ejemplo, un pié, nueve pulgadas i cinco líneas, la distancia desde el punto 1 hasta el número 9 de las divisiones en pulgadas, mas la que la trasversal señala sobre la quinta paralela a la *A E*, será un pié nueve pulgadas i cinco líneas.

La superficie o medida de un rectángulo se obtiene multiplicando la base por la altura.

La superficie del cuadrado se halla multiplicando por sí mismo uno de sus lados.

La superficie de un triángulo rectángulo es igual a la mitad del producto que resulta de multiplicar los dos catetos entre sí.

La medida de un triángulo cualquiera se consigue multiplicando la base por la altura i dividiendo el producto por dos.

Para hallar la superficie de un trapecio se multiplica la semi-suma de las bases por la altura del trapecio.

La superficie de un paralelógramo se obtiene multiplicando la base por la altura.

De un polígono regular cualquiera se consigue su superficie, multiplicando la mitad de su perímetro por un radio recto.

Para hallar la superficie de un polígono irregular se descompone éste en triángulos i trapecios cuanto exija el número de lados del polígono i su configuracion, i se halla la superficie de cada uno de ellos: sumando todas estas superficies parciales se obtendrá la del polígono dado.

La superficie de un círculo se consigue multiplicando el radio por sí mismo i el resultado por 3, 1416; el producto será el área del círculo.

La superficie de una elipse se halla multiplicando entre sí los dos semi-ejes i luego el resultado por 3, 1416: el último producto será el área de la elipse.

EJERCICIOS.

169. Dibujar una estrella de cinco puntas: ***fig.*** **96.**

Trácese una recta indefinida *mn* i en un punto *a* levántese la perpendicular *a A* que será la altura. Hágase en *A* un ángulo recto i divídase en cinco partes iguales en los puntos 1, 2, 3, 4; únase *A* con el número 1 i prolónguese la recta hasta cortar la $m\ n$ en el punto B; trasládese la distancia $a\,B$, de a a C; luego con el radio $B\ C$ i con los centros $A\ B$ hágase la interseccion E, i con el mismo radio i con los centros $A\ C$ márquese el punto D: trazando las rectas $A\,B$, $B\,D$, $D\,E$, $E\ C$ i $C\,A$, quedará terminada la figura.

170. Dibujar una estrella de seis puntas: *fig.* 97. Sea $A\,B$ la altura que se le quiere dar a la estrella i divídase en cuatro partes iguales en los puntos 1, 2, 3. El problema queda reducido a trazar dos triángulos equiláteros enlazados i cuya altura sea A 1 i B 3 (núm. 51). Estas dos figuras se pueden trazar tambien dividiendo una circunferencia en cinco partes iguales para la primera, i en seis para la segunda i uniendo cada punto con los subsiguientes a los puntos inmediatos.

171. Dibujar una cruz griega: *fig.* 98. Esta figura se compone de cuatro triángulos equiláteros iguales con cuatro vértices reunidos en un solo punto. La figura esplica por sí sola la operacion para trazarla. La *fig.* 99 es la misma modificada en los brazos de la cruz.

DE LA PARÁBOLA.

172. Otra de las curvas útiles a las artes es la *parábola*. Para definirla, concíbase una curva abierta i simétrica en un sentido $X\ V\ Z$: *fig.* 100, compuesta de dos ramas $X\,R\ V$, $V\ R\ Z$ que pueden prolongarse indefinidamente: concíbase sobre el eje de simetría $P\ Q$, llamado simplemente eje de la curva en cuestion, un punto F a una distancia arbitraria $F\ V$ del punto en que dicha curva corta su eje i tomando sobre el mismo eje $V\ P = V\ F$, considérese levantada en P la perpendicular $L\ K$ a la $P\ Q$. Ahora si los puntos de la curva propuesta son tales que cada uno de por sí diste igualmente de la recta fija $L\ K$ i del punto F tambien fijo, dicha curva será una parábola, el punto F su *foco*,

el V su *vértice*, la recta LK su *directriz* i el duplo de la distancia $F\,P$ su *parámetro*.

173 En la parábola ademas de las líneas que hemos dado a conocer, se consideran otras rectas que son las siguientes: *radio víctor* es toda recta que desde el foco va a parar a un punto de la curva, como la $F\,R$: se llama *diámetro* toda recta indefinida $R\,S$ paralela al eje.

174. Dada la directriz LK de una parábola i su vértice V trazar su eje i determinar su foco i parámetro: *fig.* 101.

Bájese desde V la $O\,P$ perpendicular a la $L\,K$, i esta recta será el eje de la parábola. Tómese $V\,F = V\,P$, i el punto F será su foco. Trácese luego una recta $P\,D = P\,F$, i la $D\,F$ será el parámetro de la misma curva.

175. Dado el eje VO de una parábola, su vértice V i uno de sus puntos N, trazar por puntos esta curva: *fig.* 101.

Resol. 1.ª—Tírese la $V\,N$ i en su estremo la perpendicular $N\,O$ hasta que encuentre en O el eje. Si desde N se baja la $N\,Q$ perpendicular a este eje, será $Q\,O$ el parámetro de la parábola pedida. Tómese, pues, $VP = VF = \frac{1}{4}\,Q\,O$ i levantando en P la LK perpendicular a $P\,O$, se tendrá la directriz de la curva cuyo foco será el punto F.

Ahora para determinar varios puntos de la parábola, tírense algunas perpendiculares 1-1, 2-2, 3-3.... a la $P\,O$ o lo que es lo mismo paralelas a la $L\,K$, i con los radios $x\,P$, $z\,P$, $u\,P$, $r\,P$.... desde el foco F trácense otras tantas circunferencias que cortarán en 1 i 1, 2 i 2, 3 i 3, 4 i 4.... las perpendiculares tiradas por los puntos respectivos x, z, u, r....; dichos puntos de interseccion pertenecen a la parábola pedida.

Resol. 2.ª *Fig.* 102.—Tambien se puede trazar por puntos la parábola, sin necesidad de conocer el foco ni la directriz. Para ello, desde el punto dado N bájese la $N\,M$ perpendicular a la $V\,Q$ i hágase $QM = Q\,N$. Divídase en igual número de partes proporcionales o simplemente iguales, en 4 por ejemplo, las rectas *Q N*, *Q M* i *Q V*, numérense los puntos de division 1, 2, 3, como se ve en la figura. Si por *M* i los puntos 1, 2, 3 se tirán las *M* 1, *M* 2, *M* 3 hasta cortar a las 1 *a*, 2 *b*, 3 *c* tiradas paralelamente a *V Q* los puntos de interseccion *a*, *b*, *c* pertenecerán a la parábola. Haciendo igual operacion con respecto al punto *N* quedarán determinados otros tres puntos de la curva *a'*, *b'*, *c'*.

176. Conocida la directriz *L K*, el foco *F* i un punto *N* de una parábola, describir esta curva por un movimiento continuo: *fig.* 103.

Desde *N* bájese la *N o* perpendicular a la *L K* i en uno de los brazos de una escuadra *E*, a partir del vértice de su ángulo tómese *n m*=*N o*. Cójase luego un hilo o cordel de igual largo que *n m* i sujétese uno de sus estremos en el punto *m* del canto de la escuadra i el otro en el foco conocido. Ajústese ahora una regla *R* a lo largo de la directriz *L K* i contra su canto el brazo menor de la escuadra. Si en tal disposicion se pone el hilo o cordel bien tirante por medio de un punzon o lapicero, i estando la punta de este instrumento siempre en contacto con el canto *n m* de dicha escuadra, se la obliga a dar la vuelta sobre el plano al mismo tiempo que este instrumento resbala a lo largo de la regla *R*, dicha punta dejará un rastro *N V M* que será la parábola buscada.

DE LA HÉLICE.

177. Hai varias clases de *hélice*, pero nosotros consideraremos solamente la *cilíndrica* i la *cónica* por ser las que tienen mas aplicaciones en las artes en jeneral, i especialmente en la maquinaria.

178. La hélice se puede considerar enjendrada por el movimiento de un punto que hallándose en contacto de la superficie curva de un cilindro o de un cono, va jirando al rededor de este cuerpo, elevándose de una magnitud cons-

tante o proporcional en cada una de las vueltas completas que verifica.

179. Dibujar sobre la superficie del cilindro recto *a n x z*, la hélice cuya altura sea la misma que la de dicho cuerpo: *fig.* **104.**

Divídase la *altura x n*, que llamaremos *paso* de la hélice. en un número par de partes iguales, por ejemplo 12; divídase en seguida en seis partes iguales, mitad del número anterior, la semicircunferencia *a d n* que representa la mitad de la base del cilindro. Por los puntos de division de la *x n* tírense rectas horizontales 1 *b'*, 2 *c'*, 3 *d'* etc., i por los de la curva *a d n*, rectas verticales *b b'*, *c c'*, *d d'* etc., hasta encontrar cada una de estas líneas su correspondiente en las anteriores, a saber: la primera vertical *b b'*, a la primera horizontal 1 *b'* en *b'*, la segunda vertical *c c'* a la segunda horizontal 2 *c'* i así de las demas. La curva *a n' z* que pase por los puntos *a*, *b'*, *c'*,...*z* así obtenidos, espresará la hélice que nos propusimos dibujar.

Al llegar el punto *a* al punto *n'*, siguiendo su movimiento pasa a la parte esterior del cilindro propuesto hasta llegar al punto *z* en que termina su vuelta completa.

Si en otro cilindro *r r'*, *p p'*, *r o p*, concéntrico al anterior, quisiesemos figurar una segunda hélice cuyo *paso* o *altura* fuese la misma *z a* de la primera, dividiríamos la semicircunferencia *r o p* tambien en seis partes iguales, por medio de los radios *C b*, *C c*.... tirados a los puntos de division de la curva *a d n;* por los puntos *s*, *t*.... elevariamos verticales hasta encontrar cada una la correspondiente horizontal de las que se tiraron ántes; i la curva *r' p' r'* conducida por los puntos así obtenidos, seria la segunda hélice buscada.

180. Describir una espiral de hélice sobre la superficie de un cono recto *a v' x*, cuyo oríjen esté en *a* i su término en *v'*: *fig.* **105.**

Divídase el lado *v' x* del cono en un número par de partes iguales, por ejemplo 12, i por los puntos de division 1, 2, 3.... tírense horizontales indefinidas. Divídase la semicircunferencia adx de la base del mismo cono en seis partes iguales i por cada punto de division tírense a la ax las perpendiculares bb'. cc', dd', ee', nn': si por los puntos b', c', d'.... trazamos otras tantas aristas del cono, los puntos 1', 2', 3'.... en que éstas irán cortando su horizontal respectiva, pertenecerán a la hélice $a\,6\,v'$ buscada.

CAPÍTULO IX.

MEDICION DE LOS CUERPOS.

181. Medir el volúmen o estension de un cuerpo es medir el espacio que ocupa. Para esta medicion se toma comunmente por unidad el *cubo* cuyo lado o arista es la unidad lineal: este lado puede ser una pulgada, un pié, una vara, un metro, etc. i entónces la unidad es la pulgada cúbica, el pié cúbico, la vara cúbica, el metro cúbico etc.

Aun cuando toda clase de cuerpo, puede ser medida, nos limitaremos solamente a la medicion de la superficie i del volúmen de los que hemos considerado en esta obrita.

Prisma.—Calcular la superficie lateral de un prisma recto.

Multiplíquese el *perímetro* de la base por la *arista lateral* del prisma i el producto será la superficie pedida.

Hallar la superficie total de un prisma regular.

Súmese su arista lateral con el *radio recto* de la base i multiplíquese la suma por el perímetro de la misma base; el producto será la superficie total del prisma dado.

Para hallar la superficie lateral de un *prisma oblícuo* multiplíquese una de sus aristas laterales por el perímetro de una seccion ocasionada al prisma por un plano perpendicular a dichas aristas i el producto será la superficie que se busca.

Para determinar el volúmen de un prisma cualquiera, multiplíquese el área de su base por su altura i el producto será el volúmen del prisma.

Pirámide.

La superficie lateral de una *pirámide regular* se obtiene multiplicando el perímetro de la base por la mitad de la *apotema*.

Para hallar la superficie total de una pirámide regular se multiplica el perímetro de la base por la semi-suma de la apotema i del radio recto de esta base.

La superficie total de una *pirámide irregular* se consigue sumando entre sí las superficies.

Para calcular la superficie lateral de una *pirámide regular truncada* multiplíquese su apotema por la semi-suma de los perímetros de las dos bases.

Vol.—El volúmen de una *pirámide cualquiera* se consigue multiplicando el arco de su base por el tercio de la altura de la pirámide.

Si se quiere medir el volúmen de una *pirámide truncada* será preciso medir el volúmen de la piramide como si estuviera completa, i luego hallar el volúmen de la pirámide deficiente: si del volúmen de la primera restamos el de la segunda, la recta será el volúmen de la pirámide truncada.

Cilindro, superficie.—Para hallar la superficie curva de un *cilindro recto* se multiplicará la diferencia de la base por su altura i el producto será la superficie pedida.

La superficie total de un cilindro recto se obtiene sumando la altura del cilindro con el radio de la base i multiplicando la suma por el contorno rectificado de la misma base.

Para medir la superficie curva de un *cilindro oblicuo*, figúrese una seccion al cilindro por un plano perpendicular a sus aristas i multiplíquese por una de estas líneas el contorno rectificado de dicha seccion, el producto será la superficie que se busca.

Vol.—El volúmen de un cilindro cualquiera se consigue multiplicando el área de su base por su altura.

Cono, sup.—La *superficie curva* de un *cono recto* se halla calculando la lonjitud del contorno de su base i multiplicándola por la mitad del lado del cono.

La *superficie total* de un cono recto se obtiene multiplicando la circunferencia de la base por la semi-suma del radio de esta base i lado del cono.

182. *Fig.* 106. **Desarrollar un cono recto, cuyo lado es de ocho piés, i dos piés el radio de su base.**

Siendo las aristas o lados de un cono recto iguales entre sí, el desarrollo de su superficie curva ha de ofrecer un perfecto sector de círculo, cuyo radio será la arista del cono i cuyo arco tendrá la misma estension que la circunferencia de su base. I como las circunferencias guardan la misma razon que sus radios, es decir que una circunferencia de ocho piés de lonjitud tiene duplo radio o diámetro que otra cuya lonjitud sea de cuatro piés, una vez conocido el radio de la base del cono i la lonjitud de su lado o arista, podrá determinarse fácilmente el arco del sector por medio de la siguiente regla: con un radio igual al lado del cono, descríbase una circunferencia i divídasela en tantas partes iguales como unidades se obtengan partiendo los piés, pulgadas, etc., de aquel lado por los piés, pulgadas, etc, del radio de la base de dicho cuerpo; i en una de estas partes se tendrá el arco del sector en el desarrollo pedido.

Con un radio $Vm=8$ piés, trácese desde un punto V una circunferencia, i divídasela en cuatro partes iguales, conteniendo el lado del cono cuatro veces al radio de su base; una de aquellas partes, esto es, el arco $m\,n$, será el arco del sector $V\,m\,k\,n$ que se debe obtener en el desarrollo de la superficie curva del cono propuesto. Si ahora por el vértice V se baja una recta que divida en dos partes iguales al arco $m\,n$ i se hace $k\,C=2$ piés, la circunferencia trazada desde C i con el radio Ck, completará el desarrollo que nos habiamos propuesto construir.

183. *Fg.* 106. **Determinar el desarrollo de un cono truncado recto, cuyas bases tienen por radio las rectas r, r' i cuya altura sea igual a la recta r''.**

Tírese una recta indefinida Vu i levántese en su estremo la perpendicular $um=r$, radio de la base mayor del tronco: póngase $uh=r''$; en h trácese la hx paralela a um e igual a r' i tírese la mx hasta que encuentre en V a la uV: la recta mV será el lado o arista del cono total i la uV su altura. Hecho esto véase la relacion numérica que existe entre el lado Vm i el radio kC, siguiendo la práctica establecida, i luego determínese el desarrollo $Vmkn$ del cono total. Si ahora con el radio Vx se traza desde V el arco xaz, el sector $Vxaz$ espresará el desarrollo de la superficie curva del cono deficiente i por lo mismo se tendrá en el cuadrilátero mixtilíneo $xznm$ el desarrollo de la superficie curva del cono truncado propuesto. Por último, si despues de tirada la VC que divida al sector en dos partes iguales, i con los radios Xa, kC iguales a r i r' se describen desde X i C las dos circunferencias que ofrece la figura, los círculos X i C serán las bases del tronco i quedará completado el desarrollo que se busca.

La superficie curva de un *tronco de cono recto* se halla multiplicando su lado o arista por la semi-suma de los contornos rectificados de las bases del tronco.

Vol.—Para hallar el volúmen de un *cono* cualquiera se multiplicará el área de su base por el tercio de su altura.

El volúmen de un *tronco de cono* se obtiene calculando los cubos de los radios de las dos bases i restando el cubo menor del mayor; multiplíquese la resta por 3, 1416 i el producto por el tercio de la altura del tronco; pártase por fin el último resultado por la diferencia entre los radios de las dos bases i el cociente será el volúmen del tronco en cuestion.

Esfera.—La superficie de una esfera se halla multiplicando 3,1416 por el cuadrado de su diámetro.

La superficie de un *casquete* esférico se consigue calculando la lonjitud de la circunferencia de un círculo máximo de la esfera i multiplicando ésta por la altura del casquete: el producto será la superficie buscada.

La superficie de un *sector esférico* se consigue hallando las superficies del cono i la del casquete que la componen i sumando estas dos superficies.

Vol.—El volúmen de una *esfera* se obtiene multiplicando el cubo del diámetro por 0,5236 i el producto será la superficie buscada.

Para hallar el volúmen de un *sector esférico*, multiplíquese la superficie del casquete que le sirve de base por el tercio del radio de la esfera i el producto será el volúmen buscado.

Para determinar el volúmen de un *segmento esférico* calcúlese el volúmen del sector correspondiente i el del cono que forma parte del sector i la diferencia de estos dos volúmenes será el volúmen del segmento en cuestion.

Se puede determinar el volúmen de un cuerpo cualquiera por un procedimiento mecánico, el cual consiste en poner el cuerpo dentro de una caja o aljibe de forma paralelipípeda i de volúmen conocido; llénese luego de agua dicha caja o aljibe i sáquese en seguida el cuerpo, teniendo cuidado en no derramar nada de líquido. Si despues de esto se calcula el volúmen del paralelipípedo vacío que ha quedado en la caja o aljibe, se tendrá en él el volúmen del cuerpo propuesto.

CAPÍTULO X.

ENSAMBLADURAS.

184. Se llama ensambladura a la union sólida de dos o mas maderos, estos pueden reunirse de dos maneras: formando un ángulo recto, en cuyo caso se llaman *ensambla-*

duras rectas o a escuadra, o formando un ángulo cualquiera, i se llaman *oblícuas*; o bien pueden reunirse por sus estremos formando una línea recta, en cuyo caso se llaman *empalmes*.

185. Se distinguen diferentes especies de estos últimos en que los mas jeneralmente empleados son: *a diente: fig.* 107, *media madera: fig.* 108, *caja i espiga*: *fig.* 109, *cola de golondrina o de milano: fig.* 110, *a almohadon: fig.* 111, *caja i espiga reforzada*: *fig.* 112, *a rayo de Júpiter etc. figs.* 113 *i* 114. Los ensambles son de llaves: *fig.* 115, *simple*, *caja i espiga: fig.* 116, *caja i espiga con inglete*, *fig.* 117 *a inglete*, *i media madera*: *fig.* 118.

ENGARGANTES.

186. Los *engargantes* son unos órganos empleados con frecuencia para la trasmision de movimiento, i se hacen de varias formas i dimensiones, como se conocerá fácilmente si se considera desde el rodaje de un reloj de bolsillo hasta el de una máquina de grandes dimensiones.

Varios son los sistemas de engargantes empleados en la maquinaria, pero atendido al objeto de la obrita nos limitaremos a dar solamente los modelos de los mas sencillos i mas comunes.

DE LAS RUEDAS DENTADAS.

187. Una *rueda dentada* es una rueda fija a un eje móvil. La circunferencia de esta rueda está armada de dientes paralelos al eje; estos dientes que son todos iguales i distan igualmente el uno del otro, se enganchan o tocan con otros de otra rueda, construida del mismo modo para formar lo que se llama un engargante. Resulta de este engargante que si una de las dos ruedas se pone en movimiento, la otra jira en sentido contrario. Si las dos ruedas tuvieran iguales diámetros i por consiguiente un número igual de dientes, ambas darian una vuelta completa en un mismo espacio de tiempo; pero cuando la una tuviera un

diámetro mayor que la otra, la menor jiraria con tanta mas rapidez proporcionalmente a la diferencia de sus diámetros. Se concibe por lo dicho que, siendo los dientes de las dos ruedas perfectamente iguales, será fácil averiguar la diferencia de rotacion entre las dos ruedas, solamente con establecer una proporcion entre el número de dientes de una i otra rueda: por ejemplo, si la mayor fuera armada de 100 dientes i la menor solo de 10, tendriamos que miéntras la primera efectúa una vuelta, la otra habria dado diez, siendo 100, mayor 10 veces que 10.

La *fig.* 119 representa dos ruedas dentadas formando un engargante.

DE LA ROSCA SIN FIN.

188. La *rosca sin fin* tiene una accion contínua sobre los dientes de una rueda dentada. Los filetes de la rosca sin fin son cuadrados i tallados exactamente para poder entrar en los espacios de los dientes de la rueda que se hallan cortados oblícuamente por corresponder a la inclinacion de la rosca sin fin.

La *fig.* 120 representa una rosca sin fin.

DE LA TAHONA.

189. La tahona es una máquina puesta en movimiento por medio de la fuerza de animales. En una máquina de esta especie se distinguen cinco partes principales que son: 1.ª el árbol vertical *A*, jirando al rededor de su eje: 2.ª la palanca *B* adaptada perpendicularmente al árbol; 3.ª la rueda horizontal *C*, que está armada de dientes verticales i paralelos al eje; 4.ª la linterna *D* que engarganta con la rueda horizontal de la tahona; 5.ª el àrbol horizontal *E* que atraviesa la linterna i le sirve de eje.

La *fig.* 121 es una tahona.

IDEA DEL ÓRDEN TOSCANO.

190. Se llama *órden de arquitectura* a la reunion de tres

diferentes cuerpos conocidos con los nombres de *pedestal*, *columna* i *cornisamento*; sin embargo, alguna vez un órden carece de pedestal.

El pedestal es la parte inferior de un órden i se divide en tres partes principales que son: la *basa*, el *dado* i la *cornisa*.

La columna consta tambien de tres partes denominadas *basa*, *fuste* o *caña* i *capitel*.

El cornisamento se compone de *arquitrave, friso* i *cornisa*.

La unidad de medida para la representacion de un órden cualquiera es el *módulo:* el módulo es siempre el radio de la parte inferior del fuste i se divide en el órden toscano en doce partes.

La columna toscana tiene de altura catorce módulos o lo que es lo mismo siete diámetros de su parte inferior.

El pedestal tiene de altura la tercera parte de la columna.

El cornisamento es la cuarta parte de la columna, de modo que un órden toscano cuando lleva pedestal tendrá de altura total veintidos módulos i dos partes, i sin pedestal diez i siete módulos i seis partes.

191. Proporcion del órden toscano: *fig.* 124.

		ALTURAS.		
		Mód.	Part.	
PEDESTAL . . .	Basa.	»	6	4—8
	Neto o dado .	3	8	
	Cornisa . . .	»	6	
COLUMNA . . .	Basa.	1	»	14—»
	Fuste o caña .	12	»	
	Capitel. . . .	1	»	
CORNISAMENTO. .	Arquitrave. .	1	»	3—6
	Friso	1	2	
	Cornisa . . .	1	4	
	Total. . .	»	»	22—2

192. Alturas i vuelos de las molduras que componen el órden toscano.

Las *molduras* son las partes menores de un órden de arquitectura i sirven tambien para decorar los muebles.

Las *alturas* de las molduras se aplican sobre perpendiculares trazadas a la línea de tierra, i los *vuelos* de las mismas, desde el *eje* para el pedestal i columna, i desde una vertical levantada por el remate de la parte superior del fuste, para el cornisamento.

193. Pedestal: *fig.* 122.	ALTURAS.		VUELOS.	
	Mód.	Part.	Mód.	Part.
Plinto	«	5	1	8 ½
Filete	»	1	1	6 ½
Dado o neto.	3	8	1	4 ½
Talon recto	»	4	1	8
Liston.	»	2	1	8 ½
194. Columna: *figs* 122 i 123.				
Plinto	»	6	1	4 ½
Toro.	»	5	1	4 ½
Filete u orla.	»	1	1	1 ½
Fuste o caña	10 ½	»	Inf. 1	»
		»	Sup. »	9 ½
Collarino.	»	» ½	»	10
Tondino.	»	1	»	11
Friso	»	4	»	9 ½
Filete o listelo.	«	1	»	10 ½
Cuarto bocel.	»	3	1	1
Abaco.	»	3	1	1 ½
Lista del abaco	»	1	1	2 ½

195. Cornisamento: *fig.* 123.	ALTURAS.		VUELOS.	
	Mód.	Part.	Mód.	Part.
Arquitrave.	»	10	»	»
Lista o tenia	»	2	»	2
Friso.	1	2	»	»
Talon recto	»	4	»	4
Listoncillo.	»	» ½	»	4 ½
Corona.	»	6	1	2
Filete	»	» ½	1	2 ½
Junquillo	»	1	1	3
Cuarto bocel.	»	4	1	6

196. Proporcion de los arcos: *fig.* **124.**

Cuando un arco carga sobre *parástades* o *machones* a los que están arrimadas o embutidas las columnas i que estas llevasen pedestal, tendrán aquellas de anchura 4 módulos, dos para la columna i uno por cada *ala* de la parástade o *pié derecho D*. De la altura de la columna i pedestal, que es 18 módulos i 8 partes, quítese un módulo para la *arquivolta B* que guarnece el arco i quedarán 17 módulos i 8 partes para la altura del claro del arco; 8 módulos i 10 partes será su anchura. Las *impostas E*, llamadas tambien capiteles de los piés derechos, tienen un módulo de alto i se harán a la altura de 12 módulos i 3 partes, dándoles 3 o 4 partes de vuelo, lo mismo que debe tener la arquivolta *B*.

Si las columnas, embutidas o arrimadas a las parástades no llevasen pedestal, tendrán éstas 3 módulos de anchura, 2 para la columna i medio para cada ala. La altura del claro del arco es igual a la altura de la columna ménos un módulo que servirá para la arquivolta, i su anchura será la mitad, es decir, 6 módulos 6 partes: a los 8 módulos i 9 partes de los piés derechos se hará la imposta de un módulo de altura como en el caso anterior.

La *fig.* 125 representa una imposta de órden toscano dibujada en escala mayor.

Al pié de las *figs.* 122 i 123 se halla la escala de módulos i partes que ha servido para dibujarlas, i al pié de la *fig.* 124 esta marcada otra escala que es la que sirvió para determinar todas las proporciones del arco.

ARMADURAS.

197. Las armaduras son una parte importante de la construccion: su altura varía segun los climas; la pendiente debe ser mas rápida en los países en donde neva o llueve mucho, a fin de proporcionar un deslizadero mas fácil; pero en los países cálidos disminuye sensiblemente, i en algunos la mayor parte de los edificios terminan con una azotea como al sur de Italia i Constantinopla. Por lo regular las armaduras no deben tener mas de un tercio ni ménos de un sesto de elevacion.

198. La *fig.* 126 es una armadura de las mas usadas, tanto por su solidez como por su combinacion sencilla.

a, *a* son los *pares: b*, es la *supanda: c*, se llama el *pendolon* i sirve para impedir que el tirante se doblegue: *d*, es el *tirante* que impide la separacion de las murallas: *e*, *e*, son los jabalcones o *piés de gallos* que dan mas consistencia a los pares; ellos se ensamblan en el pendolon; *f*, *f*, se llaman *sobacos* destinados a fortificar el tirante superior: *h*, *h*, son piezas de madera llamadas *hileras*, las que cargan sobre *jacenas*, i sobre las cuales descansan los *cabrios l*, *l:* estos cabrios llegan con sus estremidades superiores hasta la supanda, i afirman las inferiores sobre una plata-forma *m m* colocada sobre la parte superior de las murallas. Para suavizar la pendiente se agregan las dos piezas de madera *n*, *n*.

199. La *fig.* 127 representa una armadura llamada de *bohardilla.*

Estas armaduras son mui usadas en Europa i sobre todo en las grandes ciudades en donde el precio de las habitaciones es sumamente caro.

El espacio *a* está arreglado para habitacion llamada bohardilla.

Esta armadura está quebrada en los pares, i tiene una pendiente mui suave.

200. La *fig.* 128 representa una enmaderacion para un piso superior; se compone ésta de varias piezas de madera de diferentes tamaños. Las piezas *a*, *a*, son grandes *vigas* aseguradas en los muros. Delante de las ventanas se colocan ordinariamente unos atravesaños, *b*, *b*, en los que están ensambladas las viguetas. Por este medio se evita recargar los muros. Tambien se colocan los atravesaños *C* suficientemente retirados de las murallas, ante el espacio destinado para construir la chimenea, el que se llama *tolva d*, como tambien en los lugares destinados para el pasaje de cañones de chimenea de otros pisos, *e*, *e*.

La *fig.* 129. representa un embaldosado compuesto de octógonos regulares i cuadrados.

Las *figs.* 130 i 131 son dos *grecas:* greca es un adorno que consiste en una cinta doblada en ángulos rectos. Su trazado es mui sencillo, pues consiste en tirar dos paralelas *A A*, *B B* con una dimension igual al ancho que deba tener la greca, i dividir este espacio en partes iguales, i trazar por otros puntos, líneas que formarán cuadritos, cuyos lados serán iguales al ancho de la cinta i al espacio que ella deja.

Las figuras que siguen debiendo solo servir como de ejercicios, no indicarémos la operacion para trazarlas, dejando que los alumnos con las nociones adquiridas, hallen por sí solos los medios que deben emplear al efecto.

Las *figs.* 132 i 133 son dos estrellas.

La 133 es un entarimado compuesto de bandas que se cruzan en ángulos rectos encerrados en cuatro marcos iguales.

Las 134, 138 i 139 representan pisos; el primero se llama *a punto de Hungria* i los otros dos toman el nombre de pisos de baldosa: el uno está formado por exágonos regulares i el otro por cuadrados i rectángulos alternados.

La *fig.* 135 es una puerta vidriera i la 137 una puerta de una sola hoja.

La 136 es una greca, i las 140 i 141 son dos entarimados.

La 142 representa la enmaderacion para un lienzo de pared de tabique con puerta i ventanas.

Las *figs.* 143, 144 i 145 son simplemente ejercicios caprichosos.

Las 146, 147 i 148 son embaldosados para pisos.

INDICE.

FÉ DE ERRATAS.

PÁJINA.	LÍNEA.	DICE.	LÉASE
4	7	fu	un
"	8	uuste	fuste
12	18	de	del
13	13	comprenden	comprende
14	30	sean	sea
14	31	(m, q) (o, s),	(m, s) (o, q)
17	25	ltriángulo	triángulo
41	2	$F G H$	$F C H$
42	27	13, 24	1, 2—2, 4
48	4	círculos	círculos iguales a los de las bases

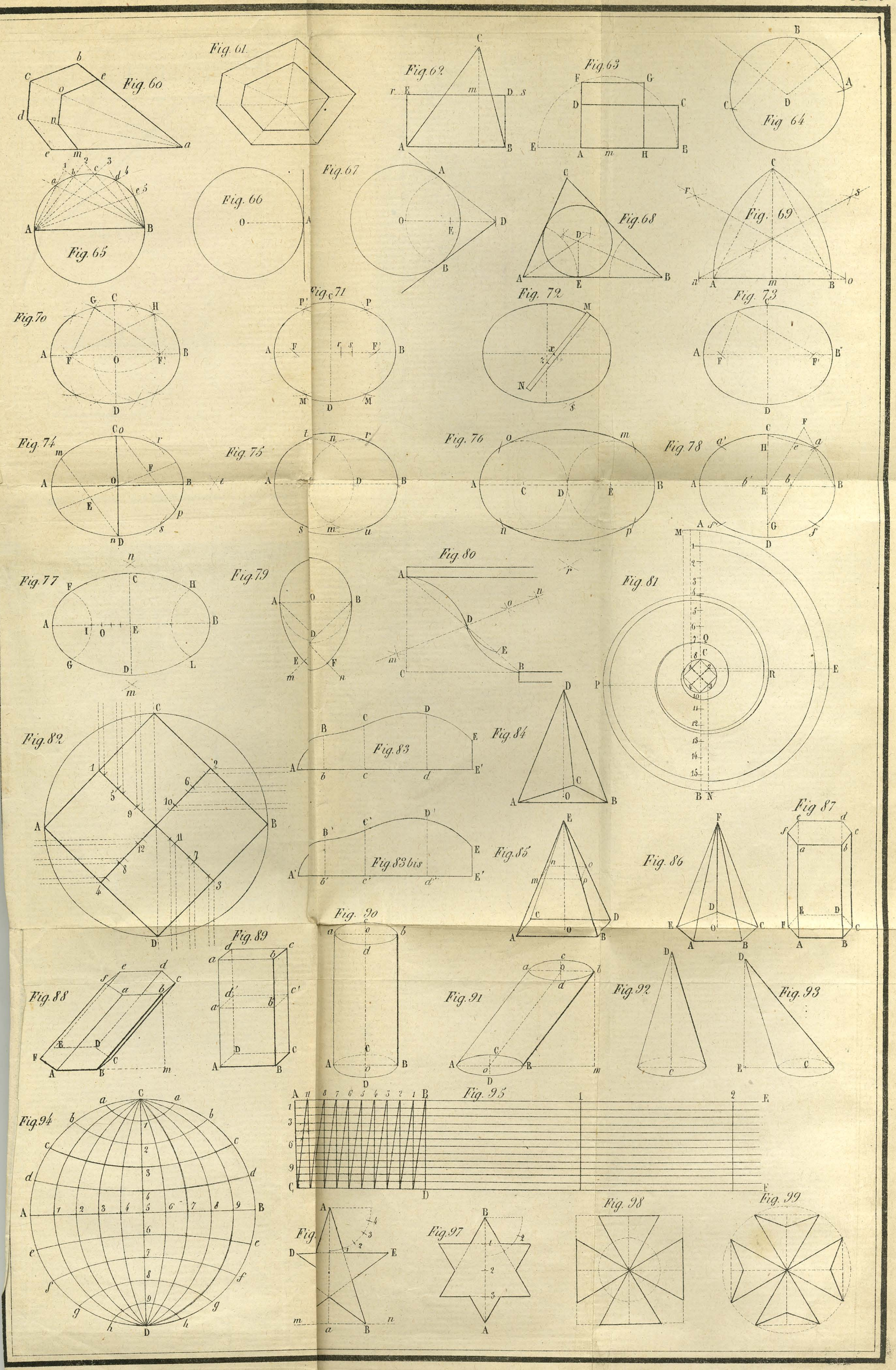


Fig. 60
Fig. 61
Fig. 62
Fig. 63
Fig. 64
Fig. 65
Fig. 66
Fig. 67
Fig. 68
Fig. 69
Fig. 70
Fig. 71
Fig. 72
Fig. 73
Fig. 74
Fig. 75
Fig. 76
Fig. 78
Fig. 77
Fig. 79
Fig. 80
Fig. 81
Fig. 82
Fig. 83
Fig. 84
Fig. 83 bis
Fig. 85
Fig. 86
Fig. 87
Fig. 88
Fig. 89
Fig. 90
Fig. 91
Fig. 92
Fig. 93
Fig. 94
Fig. 95
Fig.
Fig. 97
Fig. 98
Fig. 99

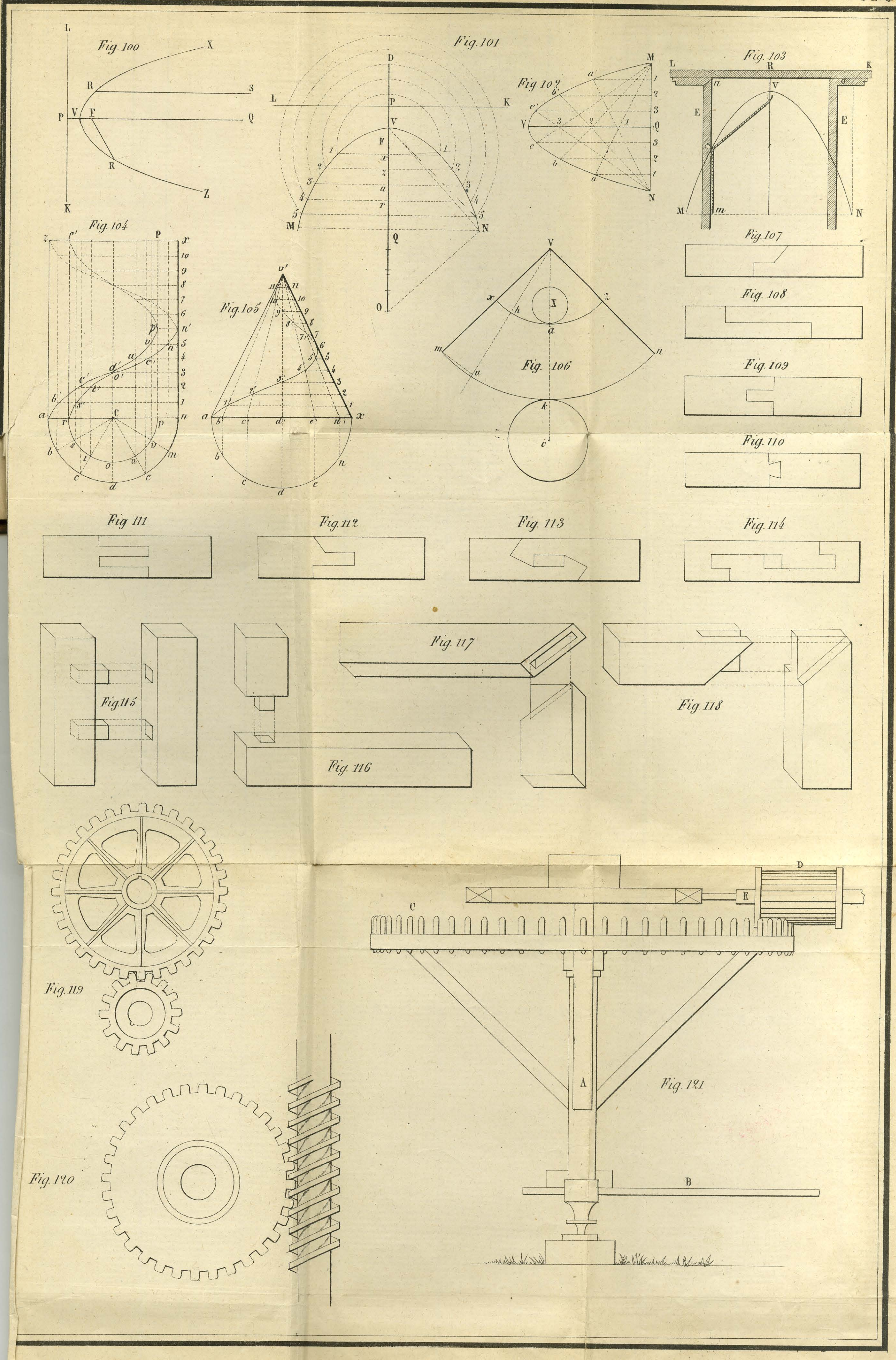


Fig. 100
Fig. 101
Fig. 102
Fig. 103
Fig. 104
Fig. 105
Fig. 106
Fig. 107
Fig. 108
Fig. 109
Fig. 110
Fig 111
Fig. 112
Fig. 113
Fig. 114
Fig. 115
Fig. 116
Fig. 117
Fig. 118
Fig. 119
Fig. 120
Fig. 121

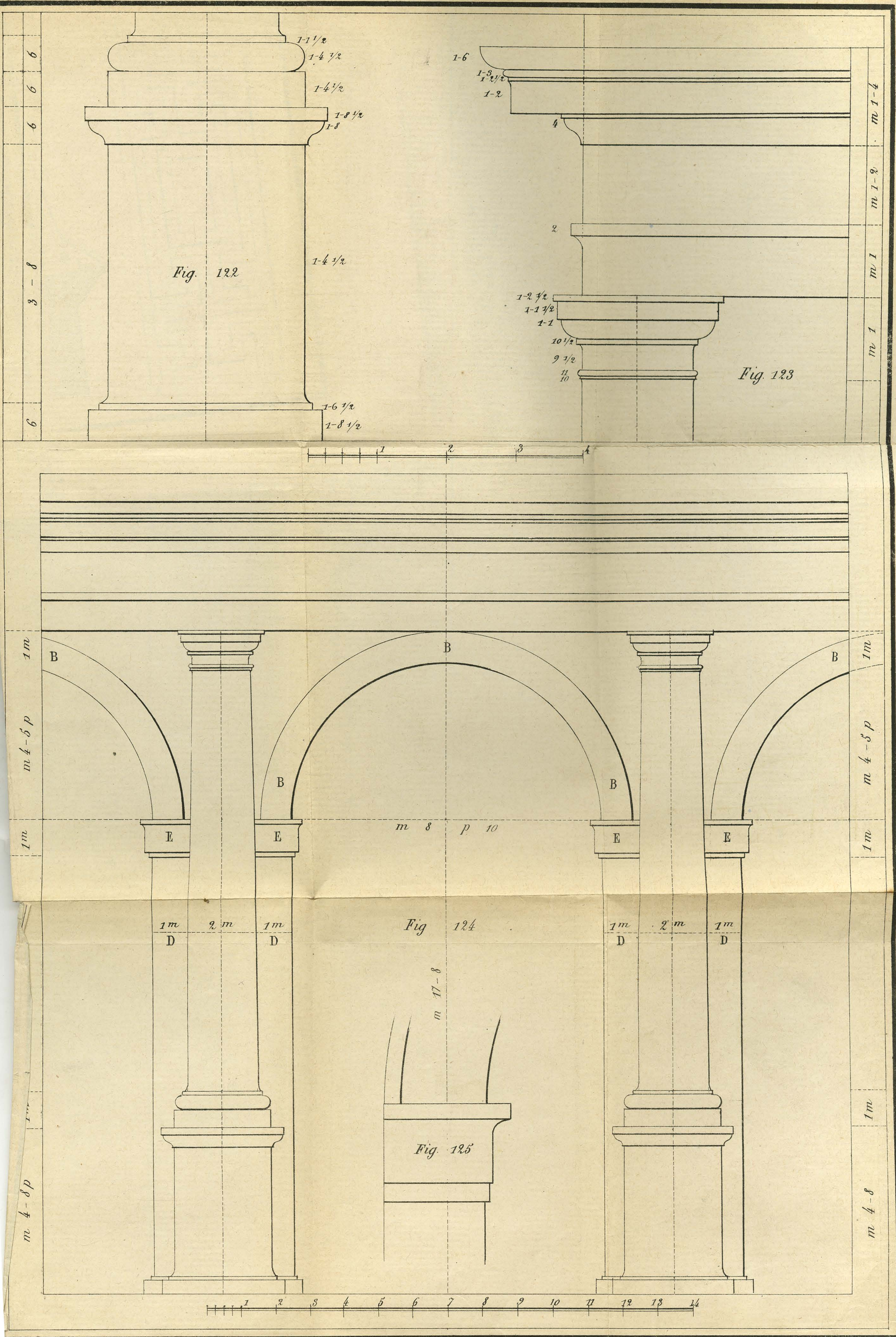
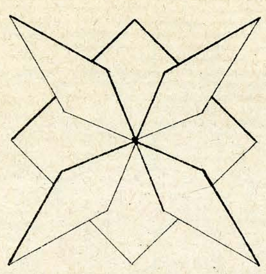


Fig. 122
1-1 1/2
1-4 1/2
1-4 1/2
1-8 1/2
1-8
1-4 1/2
1-6 1/2
1-8 1/2
6
6
6
3 - 8
6
Fig. 123
1-6
1-3
1-2 1/2
1-2
4
2
1-2 1/2
1-1 1/2
1-1
10 1/2
9 1/2
11
10
m 1-4
m 1-2
m 1
m 1
1
2
3
4
Fig 124
B
B
B
B
B
E
E
E
E
m 8 p 10
1m
2 m
1m
D
D
1m
2 m
1m
D
D
1m
m 4-5 p
1m
m 4-8 p
m 4-5 p
1m
m 4-8
m 17-8
Fig. 125
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14

Fig. 133



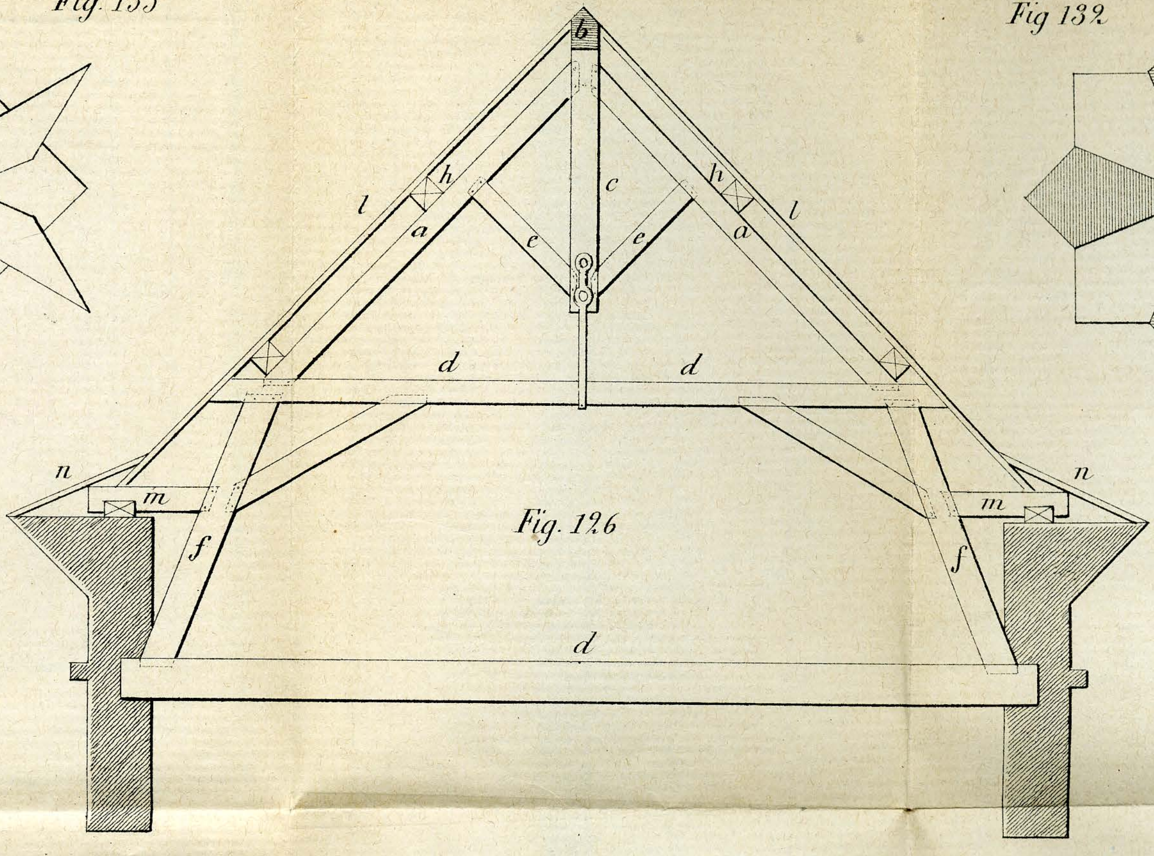


Fig. 126

Fig. 132

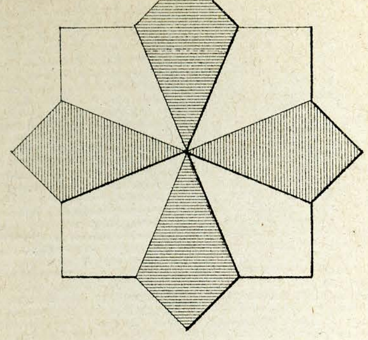


Fig. 129

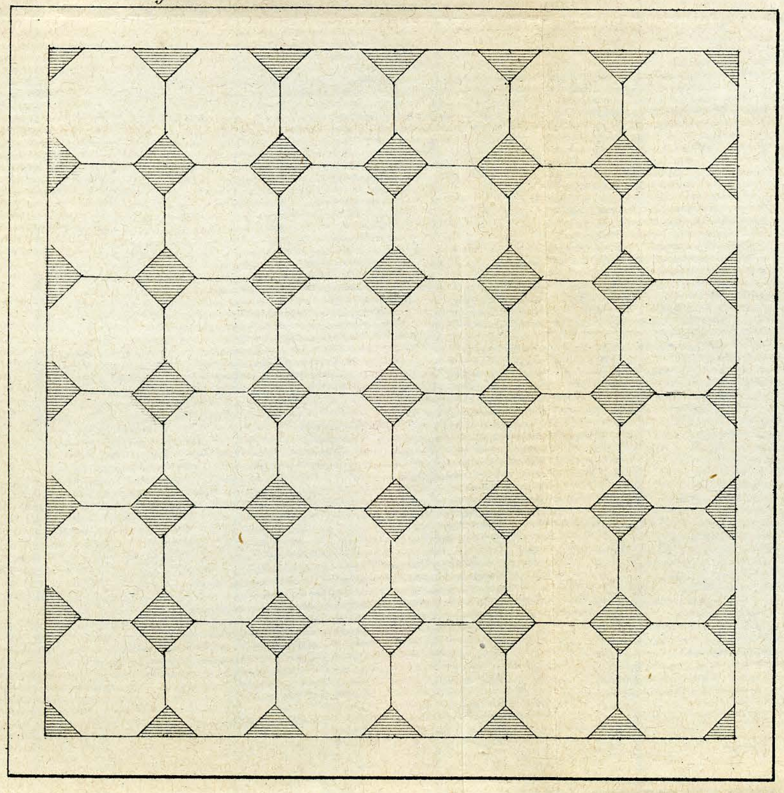


Fig. 123

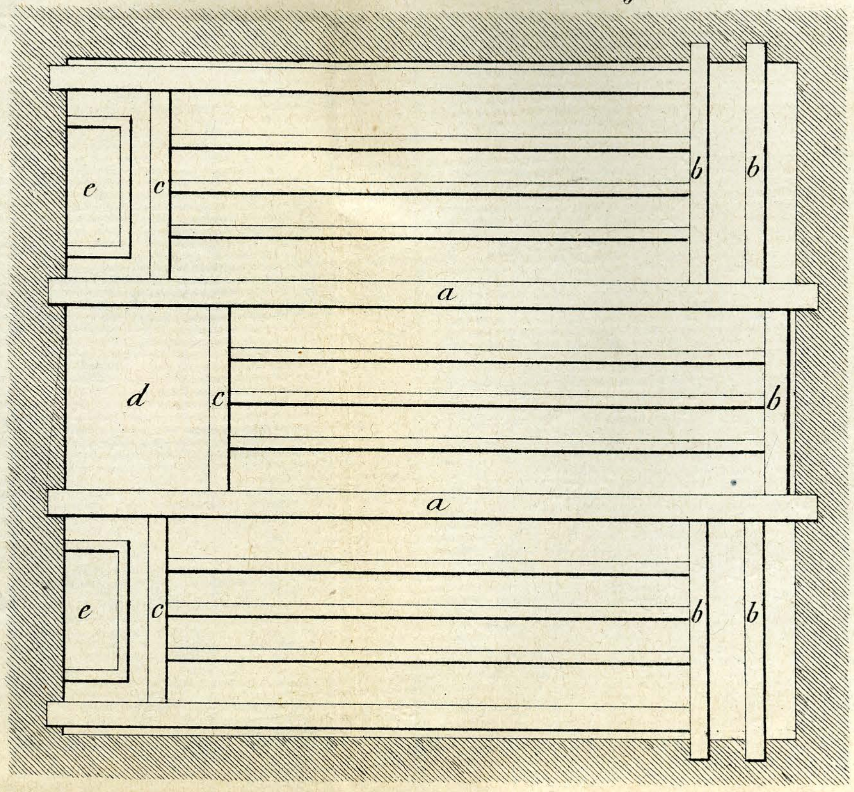
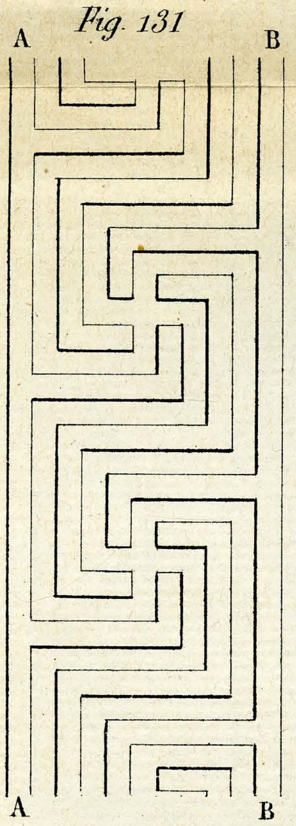


Fig. 131



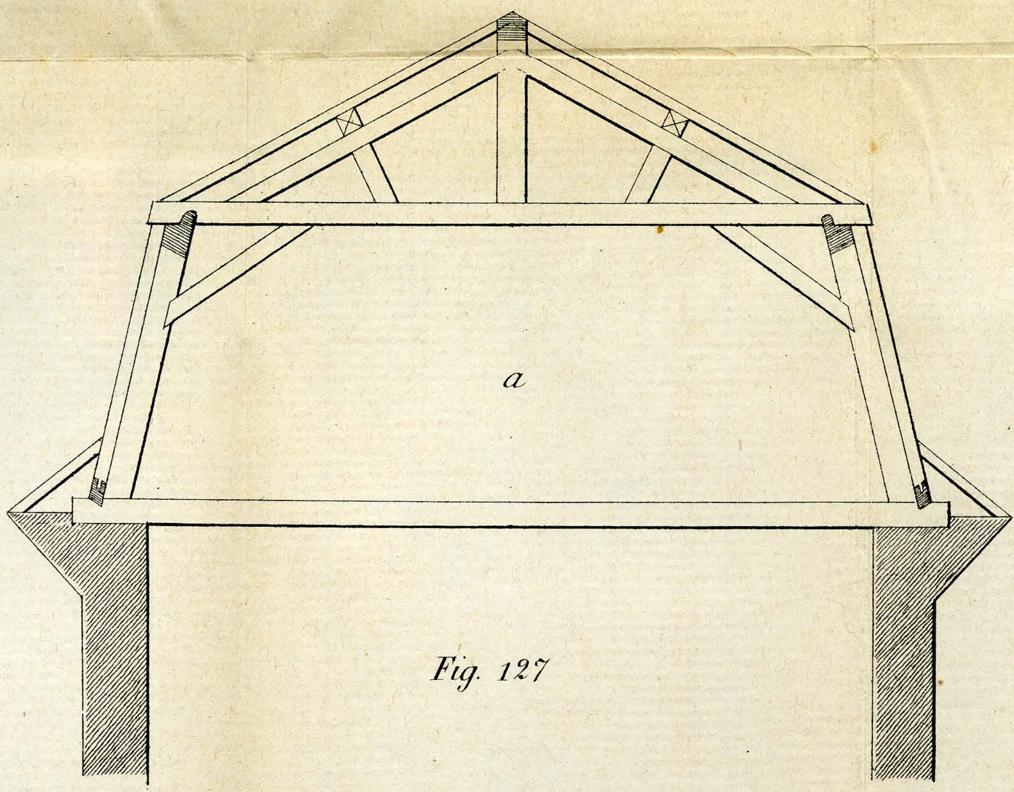


Fig. 127

Fig. 130

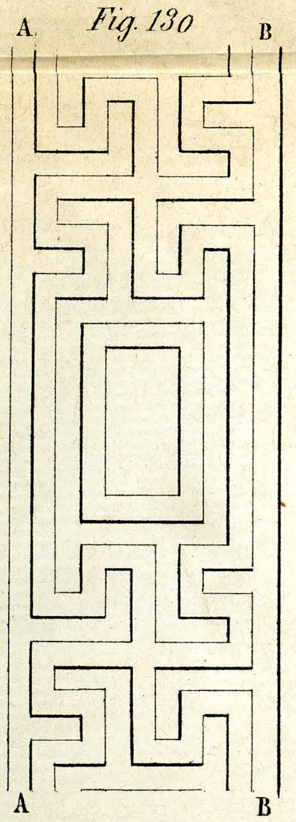


Fig. 133.

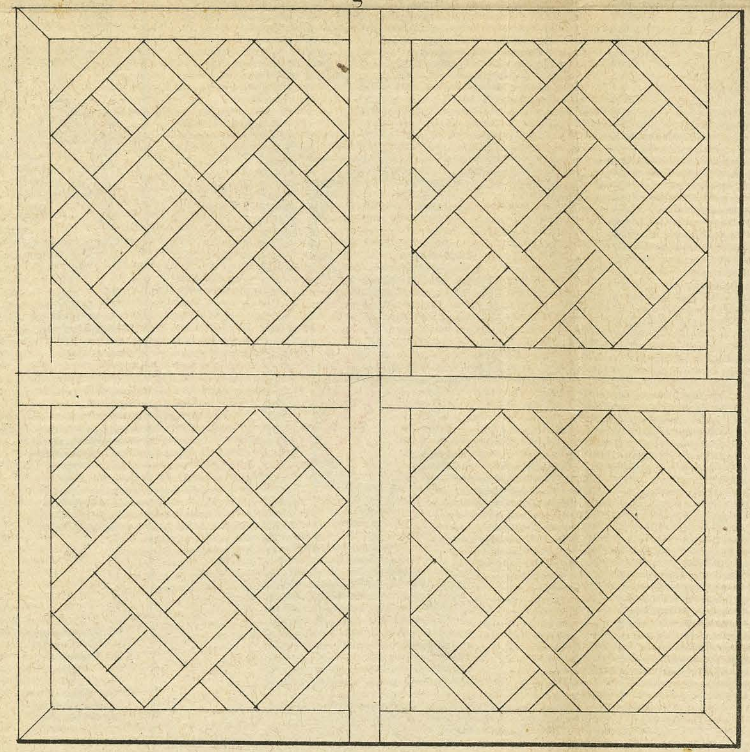


Fig. 134.

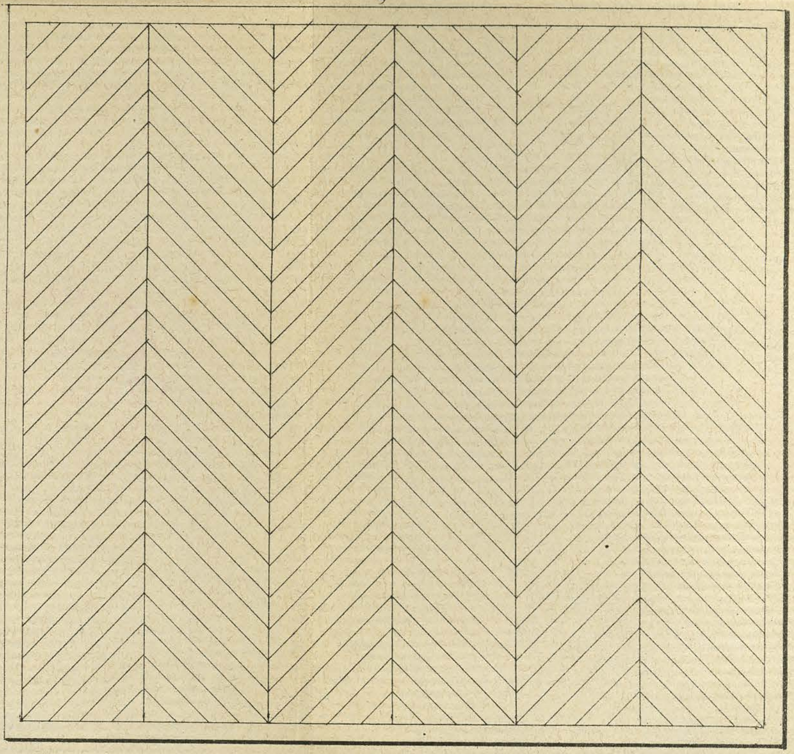


Fig. 135.

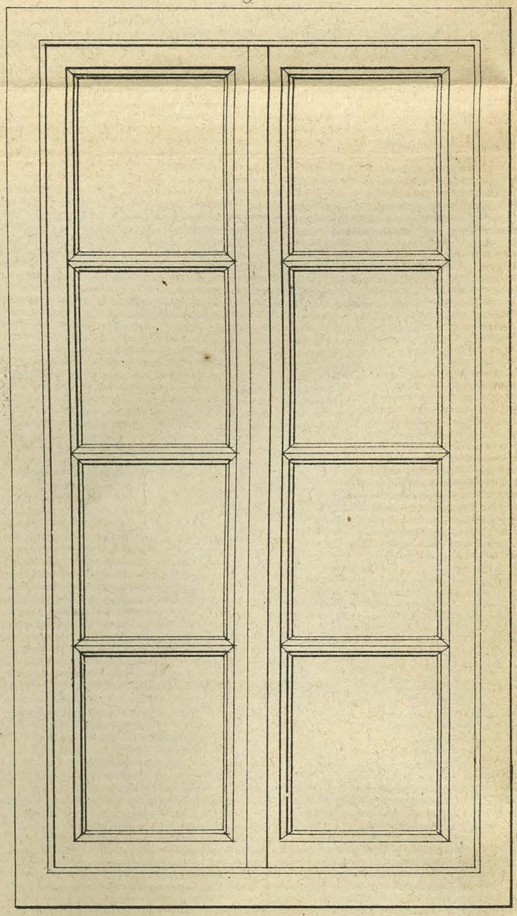


Fig. 136.

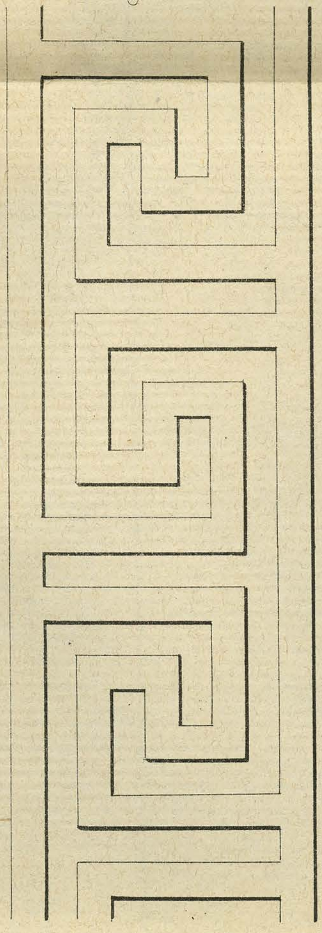


Fig. 137.

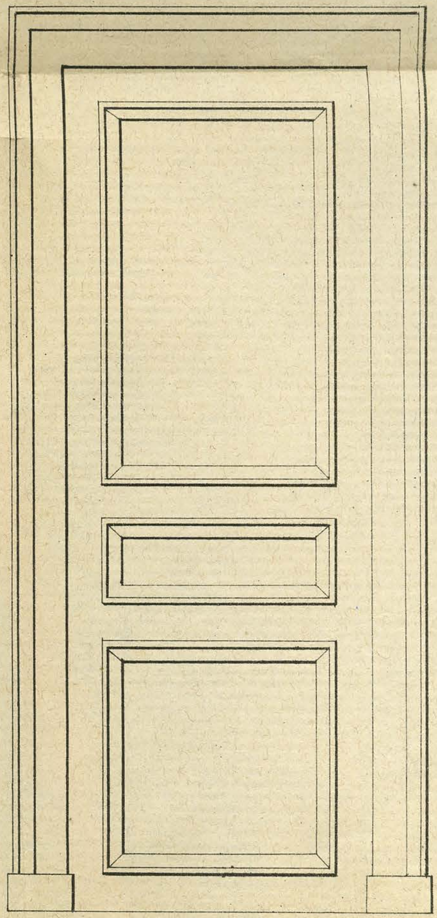


Fig. 138.

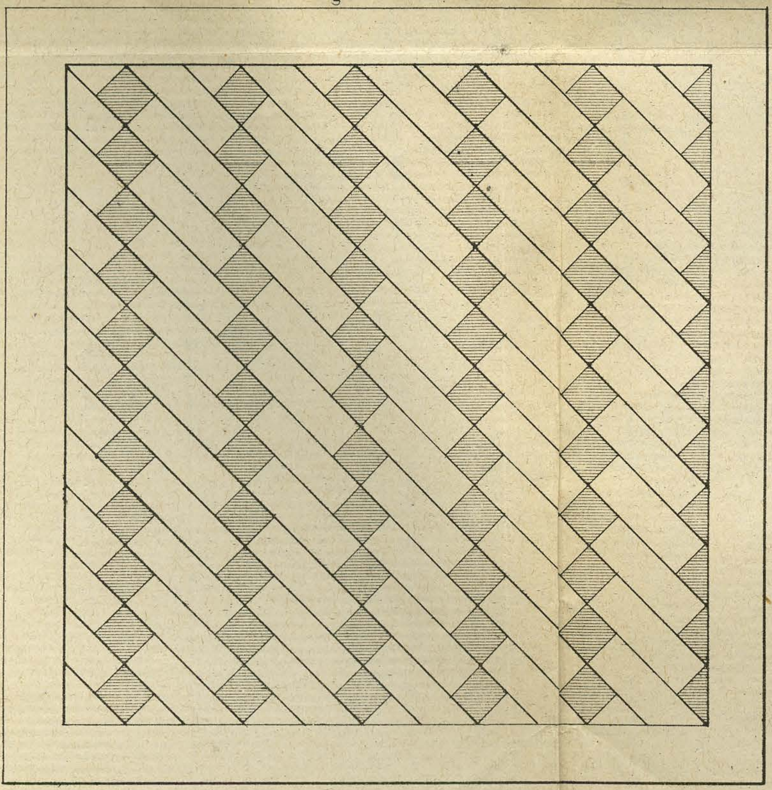


Fig. 139.

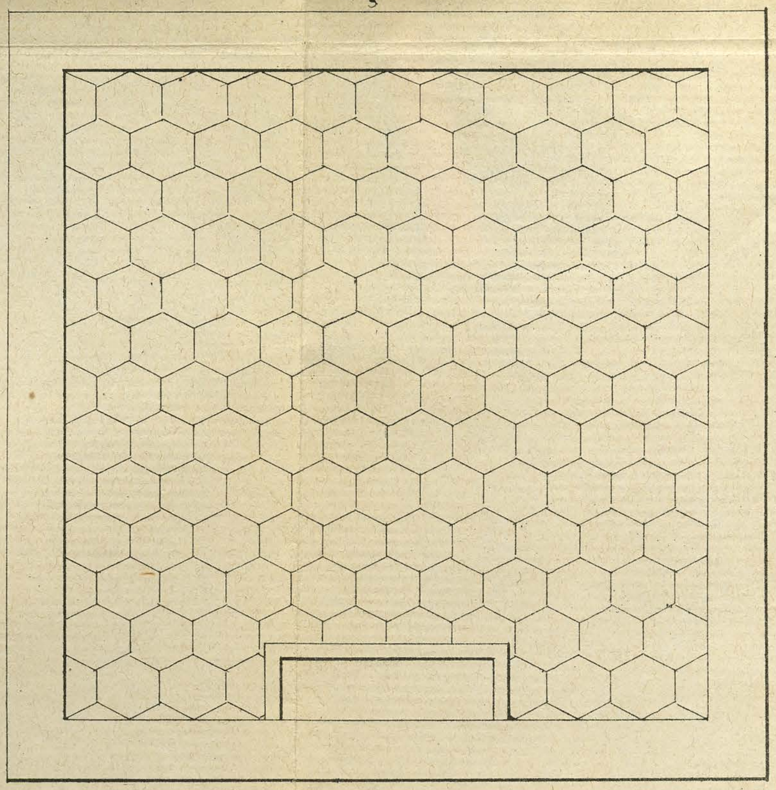


Fig. 140.

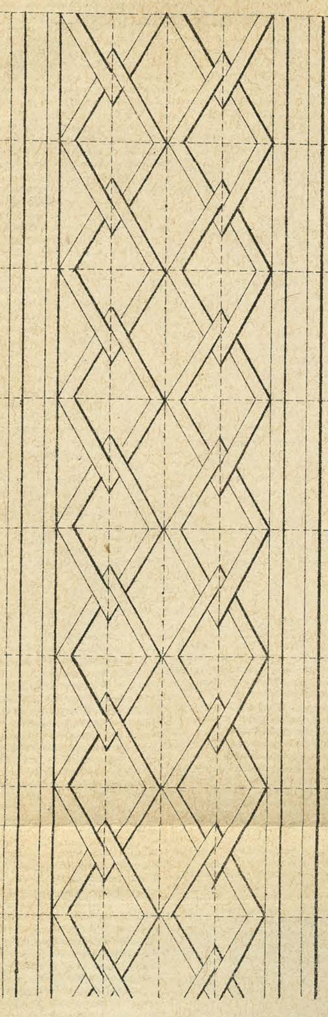


Fig. 142.

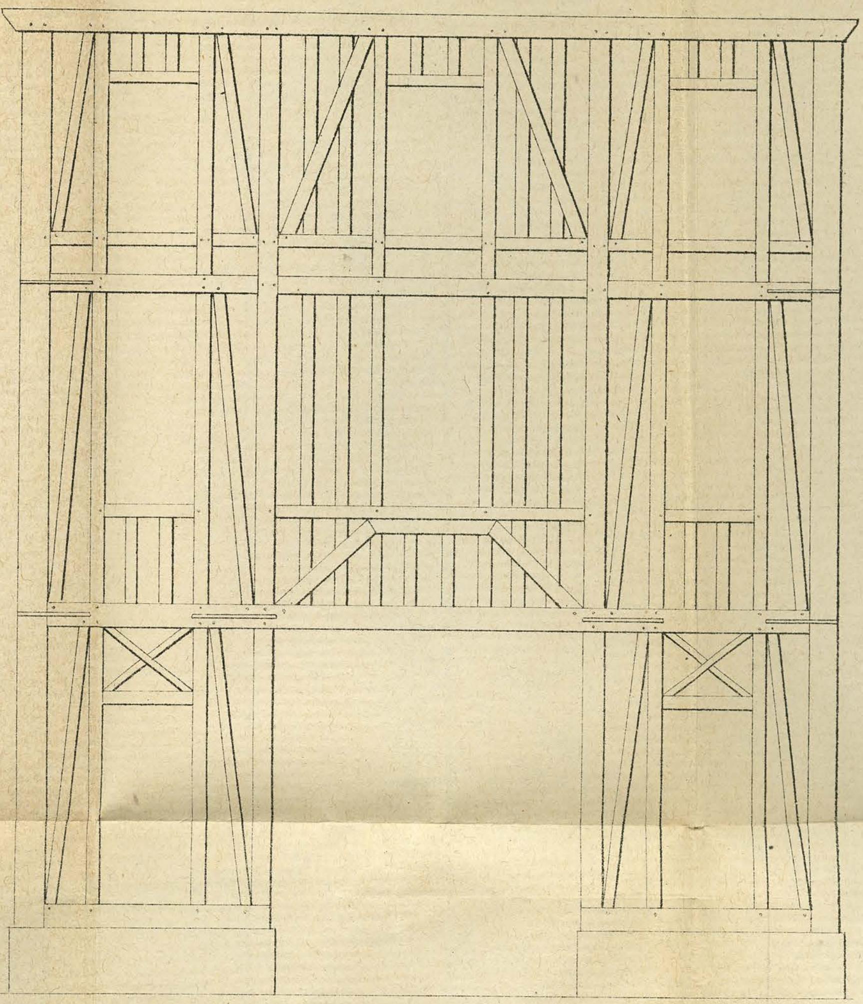


Fig. 141.

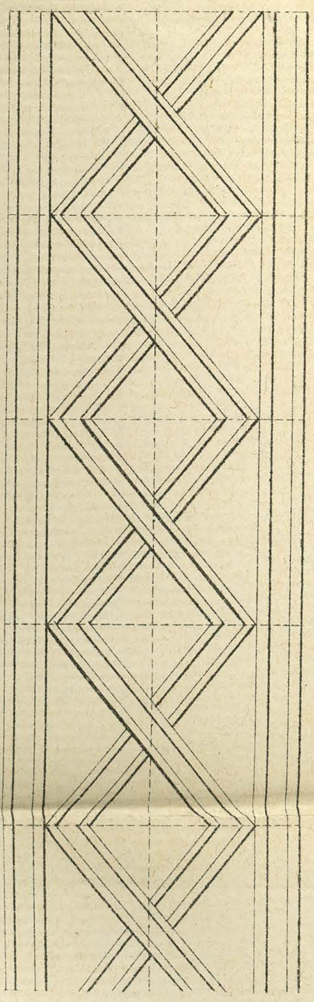


Fig. 143.

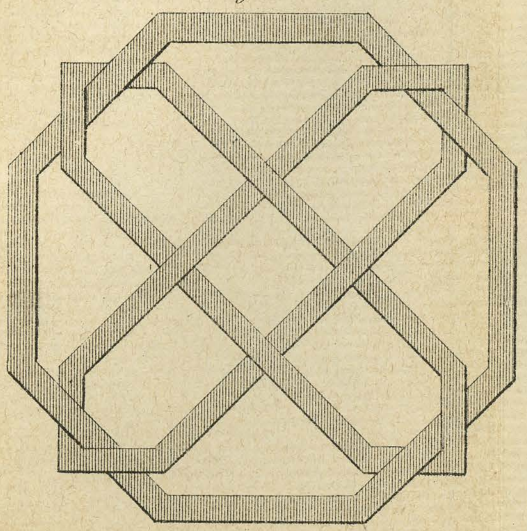


Fig. 144.

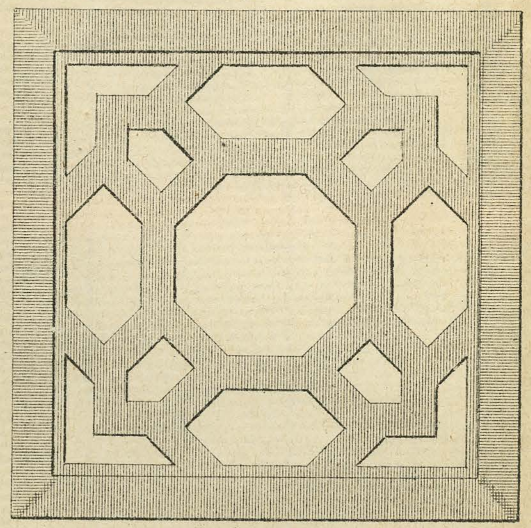


Fig. 145.

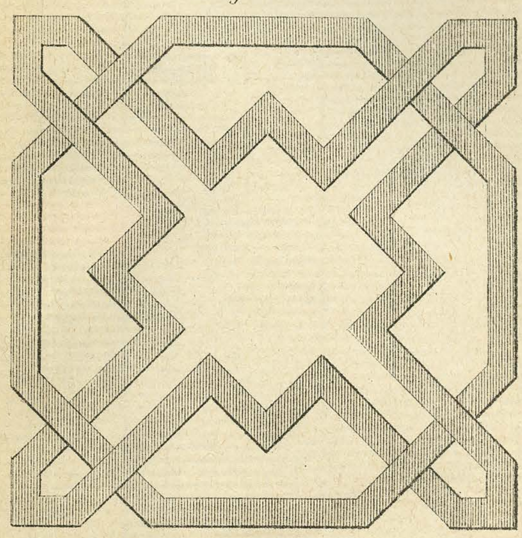


Fig. 146.

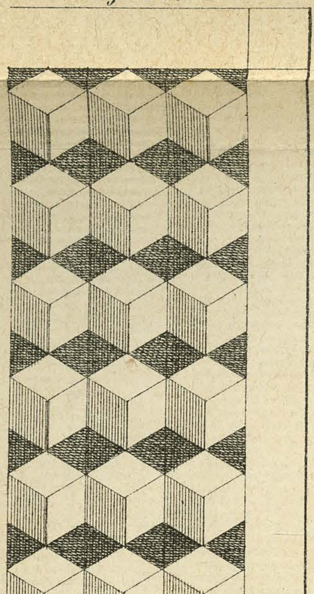


Fig. 147.

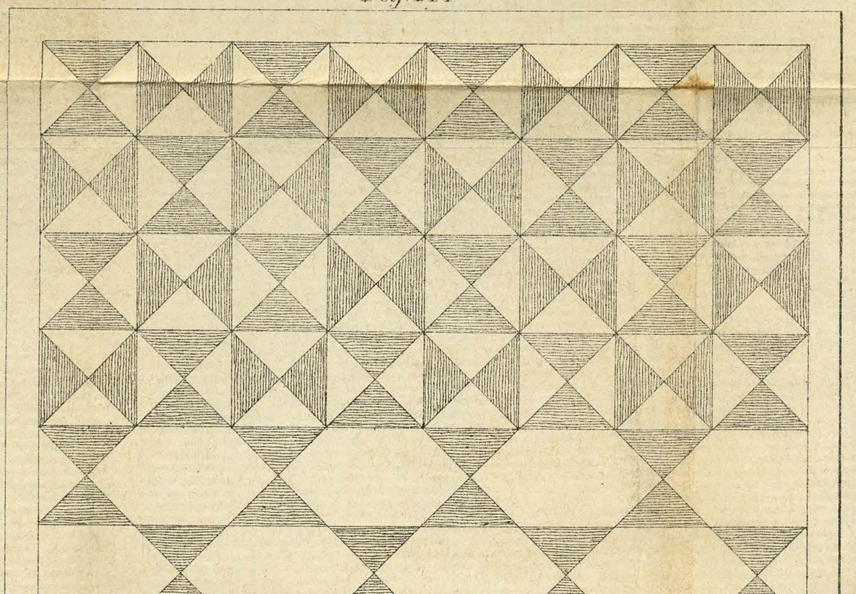


Fig. 148.